Übungen zur Atom- und Quantenphysik (SS 2018)

Prof. Dr. G. Münster, Jun.-Prof. Dr. C. Schuck; Koordinator: Dr. J. Salomon

Übungsblatt 2 **Abgabe: 03.05.2018, Besprechung: 08./09.05.2018**

Aufgabe 10: Wellenpakete und Breiten (9 Punkte)

Das Wellenpaket $\psi(x) = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \varphi(k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ ist gegeben durch

i) $\varphi(k) = \begin{cases} A_1 & \text{für } k_0 - \alpha \leq k \leq k_0 + \alpha, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$

ii) $\varphi(k) = \begin{cases} A_2(\alpha - |k|) & \text{für } |k| \leq \alpha, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Es seien $A_1, A_2 > 0$.

a) Berechnen Sie jeweils $\psi(x)$.

b) Bestimmen Sie die Konstanten A_i aus der Normierungsbedingung im Orts- oder Impulsraum.

c) Definieren Sie im Fall (i) geeignete Maße Δk und Δx für die Breite im k- und x-Raum (zum Beispiel die Halbwertsbreite, die Breite bei 1/e-tel des Maximalwertes, ...) und berechnen Sie $\Delta x \cdot \Delta k$.

d) Berechnen Sie für den Fall (ii):
$\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle k \rangle$, $\langle k^2 \rangle$, $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$, $\Delta k = \sqrt{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2}$ und $\Delta x \cdot \Delta k$.
Hinweis: $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$.

Aufgabe 11: Unschärfen einer Gauß'schen Wellenfunktion (3 Punkte)

Berechnen Sie die Orts- und Impulsunschärfen Δx und Δp und deren Produkt für $\psi(x) = N\mathrm{e}^{-ax^2/2}$. Beachten Sie die Normierung der Wellenfunktion.

Aufgabe 12: Impulsmessung und Unschärfen eines Wellenpaketes (5 Punkte)

Für ein Wellenpaket $\psi(x,t) = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\, \varphi(k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx - \omega t)}$ sei $\varphi(k) = N\mathrm{e}^{-|k|/k_0}$.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung des Impulses einen Wert zwischen $-p_1$ und p_1 zu finden?

b) Berechnen Sie $\Delta x \cdot \Delta p$ zur Zeit $t = 0$.
Hinweis: Bei Rechnungen im Impulsraum ist hier bei den Ableitungen Vorsicht geboten, so dass es sich ggf. anbietet, insbesondere $\langle x^2 \rangle$ im Ortsraum zu berechnen.

Aufgabe 13: Periodisches Potenzial (2 Punkte)

Gegeben sei das eindimensionale Potenzial

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{2ma^2} \frac{1}{1 + A\cos\frac{x}{a}}.$$

Finden Sie eine Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung von der Form

$$\varphi(x) = 1 + \beta \cos\frac{x}{a}$$

und bestimmen Sie die Energie.

Aufgabe 14: Pöschl-Teller-Potenzial (5 Punkte)

a) Skizzieren Sie das Potenzial

$$V(x) = -\frac{\hbar^2\alpha^2}{m}\frac{1}{\cosh^2(\alpha x)}\,, \qquad \alpha > 0\,.$$

b) Zeigen Sie, dass dieses Potenzial eine Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung

$$\varphi_0(x) = \frac{N_0}{\cosh(\alpha x)}$$

besitzt, und bestimmen Sie seine Energie und die Normierung.

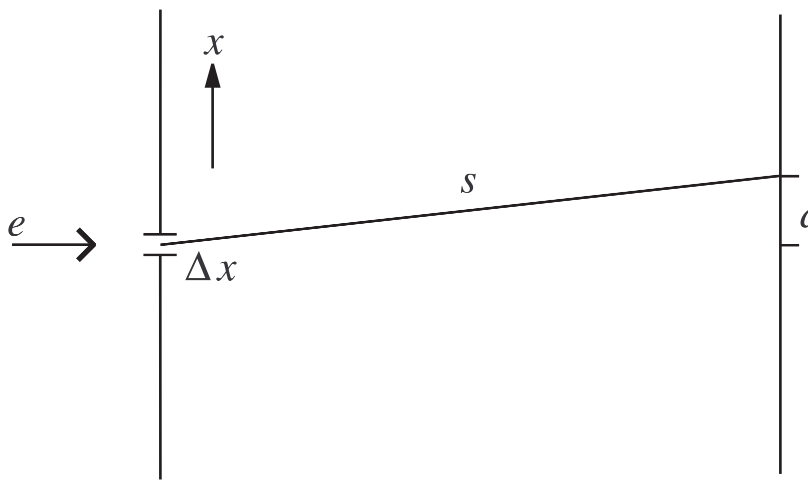
c) Finden Sie zu jeder Energie $E > 0$ eine Lösung mittels des Ansatzes

$$\varphi_k(x) = N_k(a_1 + a_2\tanh(\alpha x))\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,,$$

wobei $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$. Wie verhält sich $\varphi_k(x)$ asymptotisch für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$? Sind die Funktionen $\varphi_k(x)$ normierbar?

Aufgabe 15: Das Heisental'sche Schärfe-Experiment (3 Punkte)

Prof. Heisental hat einen Weg gefunden, die Unschärferelation zu umgehen. Sein Experiment sieht folgendermaßen aus:



Ein Elektron wird mit der Geschwindigkeit v duch einen Spalt der Breite Δx geschickt. Die Ortsunschärfe in der x-Koordinate ist dort also Δx. Etwas später, nachdem es die Strecke s zurückgelegt hat, erzeugt das Elektron einen Punkt auf dem Schirm. Dabei hat es sich in x-Richtung um die Strecke d bewegt, die mit der Genauigkeit Δx bestimmt werden kann. Hieraus schließt Prof. Heisental zurück auf die Impulskomponente p_x, die den Wert $p_x = mv_x = mv\frac{d}{s}$ besitzt, mit einer Genauigkeit $\Delta p_x = mv\frac{\Delta x}{s}$. Das Produkt $\Delta x \cdot \Delta p_x$ kann durch geeignete Wahl von s beliebig klein gemacht werden.

Hat Prof. Heisental die Unschärferelation widerlegt? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 16: Photoeffekt (3 Punkte) [Atom- und Molekülphysik]

Ein homogener monochromatischer Lichtstrahl mit der Wellenlänge $4{,}0 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$ fällt senkrecht auf Materie mit der Austrittsarbeit $2{,}0\,\mathrm{eV}$. Der Strahl hat eine Intensität von $3{,}0 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$. Jedes Photon des Strahls schlage ein Elektron frei. Bestimmen Sie (a) die Anzahl der pro m^2 und pro s emittierten Elektronen, (b) die pro m^2 und pro s absorbierte Energie und (c) die kinetische Energie der Photoelektronen.