# Übungen zur Atom- und Quantenphysik (SS 2018)

Prof. Dr. G. Münster, Jun.-Prof. Dr. C. Schuck; Koordinator: Dr. J. Salomon

**Übungsblatt 11** **Abgabe: 12.07.2018, Besprechung: 17./18.07.2018**

## Aufgabe 57: Anzahl der Zustände in einer Schale (2 Punkte) [Atom- und Molekülphysik]

Zeigen Sie, dass die Anzahl der möglichen Zustände ($n$, $l$, $m_l$, $m_s$) zu jeder Hauptquantenzahl $n$ gerade gleich $2n^2$ ist.

## Aufgabe 58: „Schalenaufbau“ der Atome (4 Punkte) [Atom- und Molekülphysik]

a) (2 Punkte) Geben Sie die Elektronenkonfiguration des Eisenatoms an. Geben Sie für jedes $d$-Elektron des Eisenatoms die Quantenzahlen ($n$, $l$, $m_l$, $m_s$) an.

b) (2 Punkte) Die Bindungsenergien der Zustände $4p$, $4d$ und $4f$ im Lithiumatom sind praktisch gleich der Bindungsenergie des Zustands mit $n = 4$ im Wasserstoffatom. Wie lässt sich das erklären? Die Bindungsenergie des Li-Zustands $4s$ ist hingegen deutlich abgesenkt, also stärker gebunden. Erklären Sie auch diese Beobachtung.

## Aufgabe 59: Drehimpulskonfigurationen in Zweielektronsystemen (3 Punkte) [Atom- und Molekülphysik]

Beschreiben Sie ein Zweielektronsystemen mit einem $2p$- und einem $3d$-Elektron in $LS$-Kopplung und $jj$-Kopplung. Zeigen Sie, dass die möglichen Werte für den Gesamtdrehimpuls und die Zahl der insgesamt möglichen Zustände in beiden Fällen gleich sind. Zählen Sie die möglichen Zustände unter Berücksichtigung der magnetischen Quantenzahl. Welcher Zustand ist in $LS$-Kopplung am stärksten gebunden?

## Aufgabe 60: Spin in beliebigen Richtungen (5 Punkte)

Es sei $\vec{n}$ ein Vektor der Länge $|\vec{n}| = 1$. Die Komponente des Spins in Richtung $\vec{n}$ ist definiert durch $S = \vec{n} \cdot \vec{S}$.

a) (1 Punkt) Schreiben Sie $\vec{n}$ in Polarkoordinaten und berechnen Sie den Erwartungswert von $S$ im Zustand $|+\rangle$.

b) (1,5 Punkte) Geben Sie $S$ unter Verwendung der Polarkoordinaten von $\vec{n}$ explizit als $2 \times 2$-Matrix an und zeigen Sie $S^2 = \frac{\hbar^2}{4}\,\mathbb{1}$.

c) (1,5 Punkte) Welche Eigenwerte besitzt $S$? Finden Sie die zugehörigen Eigenvektoren $\xi^{(+)}$ und $\xi^{(-)}$.

d) (1 Punkt) Sei $\xi^{(+)}$ Eigenvektor zum positiven Eigenwert von $S$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, bei einer Messung von $S_3$ im zugehörigen Zustand den Wert $\frac{\hbar}{2}$ bzw. $-\frac{\hbar}{2}$ zu finden und berechnen Sie $\langle S_3 \rangle$ in diesem Zustand.

## Aufgabe 61: Spinor-Wellenfunktion (4 Punkte)

Ermitteln Sie die Normierungskonstante $N$ der Spinorwellenfunktion

$$\psi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \psi_+(\vec{r}) \\ \psi_-(\vec{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N\,\mathrm{e}^{-\frac{\vec{r}^2}{2d^2}} \\ N\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2+y^2+z^2}{2d^2}} \end{pmatrix} \qquad (a \in \mathbb{R},\ d > 0).$$

Berechnen Sie den Erwartungswert des Operators $\vec{S} \cdot \vec{Q}$ im Zustand der Spinorwellenfunktion $\psi(\vec{r})$.

**Aufgabe 62: Klassische und Quantencomputer (4 Punkte)**

a) (1,5 Punkte) Die logische Verknüpfung AND zweier Bits $a$ und $b$ kann in der Boolschen Algebra arithmetisch durch $a$ AND $b = a \cdot b$ dargestellt werden. Wie lauten die arithmetischen Darstellungen für NAND, OR und NOR?

b) (1,5 Punkte) Das Toffoli-Gatter $(a, b, c) \longmapsto (a, b, c + a \cdot b)$ kann durch geeignete Wahl der Input-Bits die Funktionen/Verknüpfungen NOT $x$, $x$ AND $y$, $x$ NAND $y$ und $x$ XOR $y$ realisieren. Wie muss der Input jeweils gewählt werden, damit das gewünschte Ergebnis im dritten Output-Bit des Gatters steht?

c) (1 Punkt) Eine Basis für 2-Qubit-Zustände ist gegeben durch $\{|0{,}0\rangle, |0{,}1\rangle, |1{,}0\rangle, |1{,}1\rangle\}$. Durch welche Matrizen werden bezüglich dieser Basis die folgenden Gatter dargestellt:

$$\begin{aligned} \text{CNOT:} \quad & |a, b\rangle \longmapsto |a, a + b\rangle, \\ \text{SWAP:} \quad & |a, b\rangle \longmapsto |b, a\rangle, \\ \text{NOT2:} \quad & |a, b\rangle \longmapsto |a, \text{NOT } b\rangle. \end{aligned}$$