

Aufgabe 1: Advection equation in 1D

Betrachten Sie das Anfangswertproblem für eine eindimensionale Advektionsgleichung

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + c \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x)$$

mit der Geschwindigkeit $c > 0$, $x \in [0, 2\pi]$ und periodischen Randbedingungen. Die analytische Lösung ist $u(x, t) = u_0(x - ct)$.

Lösen Sie die Gleichung mit Hilfe von Fourier-Galerkin-Methode. Die Anfangsfunktion $u_0(x)$ ist gegeben durch

$$u_0(x) = \exp\left(-2\pi\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2\right).$$

Für die Zeitintegration benutzen Sie ein Runge-Kutta Verfahren vierter Ordnung.