Universität Münster

Physik
für Mediziner, Zahnmediziner und Pharmazeuten

Iris Niehues
Physikalisches Institut, Universität Münster

17.10.2025

living.knowledge

Messunsicherheit

Um die Genauigkeit bewerten zu können, müssen wir wissen **wie** genau unsere Messung ist.

Beispiel: Längenmessung

1. Schritt
2. Zollstock
3. Maßband
4. Lasermesser

Genauigkeit von 1. bis 4. wird immer besser!

Folgerung: In jeder einzelnen Messung kann ein Wert nur so genau sein wie die Messapparatur es erlaubt (Annahme: korrektes Ablesen!) $\rightarrow$ **Messunsicherheit**

Absolute Messunsicherheit

Wir schreiben für die Längenmessung: $\boxed{L = x \pm \Delta x}$
x: Messwert, z.B. 1 m
Δx: Messunsicherheit, z.B. 5 mm $= 0,005$ m

Beispiel:

$$\begin{aligned} L &= 1\,\mathrm{m} \pm 0,005\,\mathrm{m} \\ &= (1 \pm 0,005)\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

das ist eine **absolute** Unsicherheit Δx (sie hat die gleiche Einheit wie die Messgröße)

Relative Messunsicherheit

relative Messunsicherheit $\dfrac{\Delta x}{x}$

Beispiel:

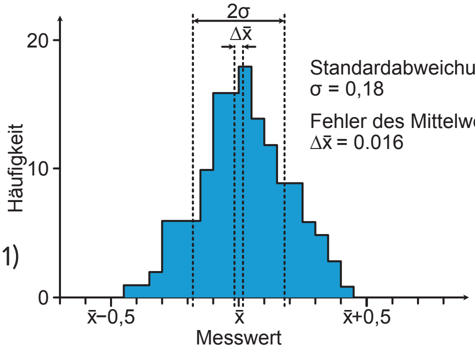
$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{0,005\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{m}} = 0,005 = 0,5\%$$

Diese Größe hat keine Einheit und wird häufig in % angegeben

Beispiel Längenmessung

Messwerte x_i mit $i = 1, 2, \ldots n$
n ist die Anzahl aller Messwerte
Mittelwert $\bar{x}$ oder $\langle x \rangle$:

$$\bar{x} = \langle x \rangle = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad (1)$$



Standardabweichung
$\sigma = 0{,}18$

Fehler des Mittelwerts
$\Delta\bar{x} = 0.016$

Beispiel einer Längenmessung

Messung Nr. n	Messwert d [µm]	Streuung um Mittelwert $\bar{d} - d_i$ [µm]
1	165	-0,7
2	168	2,3
3	165	-0,7
4	164	-1,7
5	166	0,3
6	165	-0,7
7	167	1,3

Zahl der Messungen:
$n = 7$

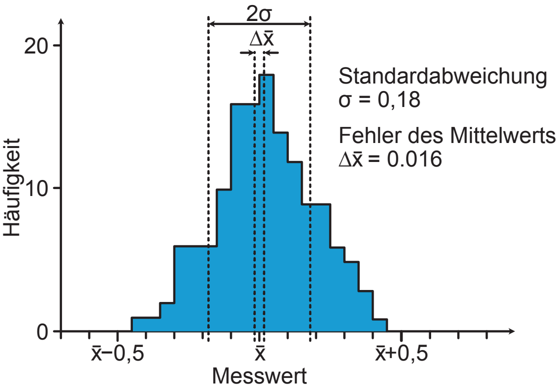
Summe der Messwerte:
$\sum_{i=1}^{n} d_i = 1160\ \mu m$

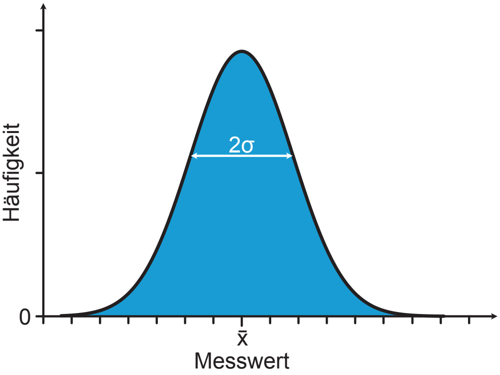
Mittelwert:
$\bar{d} = \frac{1}{7} \cdot 1160\ \mu m = 165{,}7\ \mu m$

Standardabweichung :
$\sigma = \sqrt{\frac{1}{7-1} \cdot \sum_{i=1}^{7} (\bar{d} - d_i)^2} = 1{,}3\ \mu m$

Fehler des Mittelwertes:
$\Delta d = \frac{\sigma}{\sqrt{7}} = 0{,}5\ \mu m$

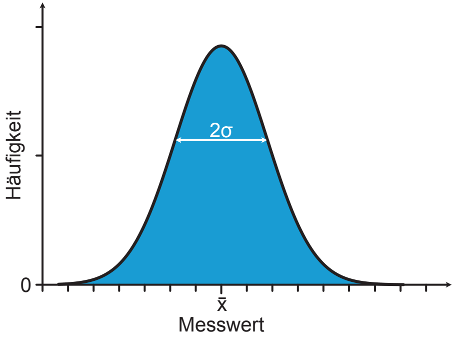
Histogramm und Gauß-Verteilung





Universität Münster

Gauß-Verteilung



Normalverteilung $\rightarrow$ charakterisiert durch:

Mittelwert $\overline{x}$

Standardabweichung σ

Varianz (Streuung, Breite) σ^2

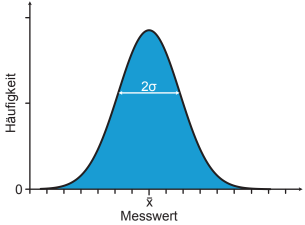
$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$$

Galtonsches Brett:

Experiment

- Zufallsbrett simuliert ein physikalisches Messgerät dessen Messwerte verrauscht sind
- Horizontale Position der Kugel ist der zu messende Wert, Hindernisse verursachen kleine Störungen (positiv und negativ)
- Verteilung der Kugeln entspricht einem Histogramm der Messwerte

Funktion für die Normalverteilung/Gauß-Verteilung



$$H(x) \sim e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2} = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2\right]$$

68% der Messungen liegen im Intervall $[\bar{x}-\sigma, \bar{x}+\sigma]$
95% der Messungen liegen im Intervall $[\bar{x}-2\sigma, \bar{x}+2\sigma]$
99,7% der Messungen liegen im Intervall $[\bar{x}-3\sigma, \bar{x}+3\sigma]$

Folgerung: Führt man eine Messung durch, die einer Schwankung/Fluktuation unterliegt entsteht dadurch eine Unsicherheit für die Messung $\rightarrow \sigma$ quantifiziert diese

Verknüpfte Messungen: Fehlerfortpflanzung

- Messung die mehrere Messgrößen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ verknüpft,
- Messunsicherheiten jeder einzelnen Größe gehen in die Gesamtunsicherheit ein
- absolute Unsicherheiten: hat gleiche Einheit wie Messgröße $x_1 = (10 \pm 5)$ m
- relative Unsicherheiten: oft in % angegeben $x_1 = 10$ m ± 2 % (2% entsprechen hier 0,2m)

Absolute Unsicherheiten

1. Absolute Unsicherheiten addieren sich bei Addition und Subtraktion:

$$y = x_1 + x_2 \quad \text{oder} \quad y = x_1 - x_2$$
$$\Rightarrow \Delta y = \Delta x_1 + \Delta x_2$$

Beispiel: Gesamtlänge aus zwei Messungen L

$L = L_1 + L_2$

$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2$$

Die Einheit bleibt erhalten!

Relative Unsicherheiten

1. Relative Unsicherheiten addieren sich bei Multiplikation und Division:

$$y = x_1 \cdot x_2 \quad \text{oder} \quad y = \frac{x_1}{x_2}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2} = \frac{\Delta x}{x_1 \cdot x_2}$$

mit $x_2 \cdot \Delta x_1 + x_1 \cdot \Delta x_2 = \Delta x$.

Relative Unsicherheiten

Beispiel: Bestimmung einer Fläche A
$A = L \cdot B$ (Fläche = Länge mal Breite)
Die Messungen von Länge und Breite haben Unsicherheiten ΔL und ΔB. Damit folgt:

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta B}{B} = \frac{\Delta A}{L \cdot B}$$

mit $B \cdot \Delta L + L \cdot \Delta B = \Delta A$.

Beispielrechnung Unsicherheiten Tafel

Messunsicherheit verknüpfte Größe - Allgemein

- Bisher: spezielle Rechenregel
- allgemein: mehrere Messgrößen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ über einen funktionalen Zusammenhang $y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ verknüpft
- gesamt Unsicherheit hängt vom speziellen Zusammenhang ab
- Unsicherheit von y Berechnung des totale Differential von $y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$

$$\Delta y = \left| \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 \right| + \left| \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2 \right| + \ldots.$$

∂partielle Ableitung

TED 20-1.28-F05

Das Ergebnis einer einmaligen (korrekt durchgeführten) Messung der Pulsfrequenz mit einem automatischen Messgerät ergibt 120/min. Die Genauigkeit wird vom Hersteller mit $\pm 5\%$ angegeben.

Die absolute Messunsicherheit (der absolute Fehler) beträgt demnach

A $\pm$ 0,6/min

B $\pm$ 2,4/min

C $\pm$ 4/min

D $\pm$ 6/min

E $\pm$ 24/min

TED 20-1.28-F05

Das Ergebnis einer einmaligen (korrekt durchgeführten) Messung der Pulsfrequenz mit einem automatischen Messgerät ergibt 120/min. Die Genauigkeit wird vom Hersteller mit $\pm 5\%$ angegeben.

Die absolute Messunsicherheit (der absolute Fehler) beträgt demnach

A $\pm$ 0,6/min

B $\pm$ 2,4/min

C $\pm$ 4/min

D $\pm$ **6/min**

E $\pm$ 24/min

TED 20-1.39-H04

Ein Gegenstand bewegt sich gleichförmig und geradlinig von Punkt A nach Punkt B. Die (einmalige) Messung des Abstandes zwischen A und B ergab $s = 110$ mm. Die maximale relative Unsicherheit sowohl der Zeit als auch der Streckenmessung hat jeweils ± 0.5 % betragen.
Etwa wie groß ist die maximale Unsicherheit der aus t und s errechneten Geschwindigkeit $v = s/t$?

- A $\pm$ 0,3 %
- B $\pm$ 0,5 %
- C $\pm$ 1 %
- D $\pm$ 5 %
- E $\pm$ 10 %

TED 20-1.39-H04

Ein Gegenstand bewegt sich gleichförmig und geradlinig von Punkt A nach Punkt B. Die (einmalige) Messung des Abstandes zwischen A und B ergab $s = 110$ mm. Die maximale relative Unsicherheit sowohl der Zeit als auch der Streckenmessung hat jeweils $\pm 0.5\,\%$ betragen.

Etwa wie groß ist die maximale Unsicherheit der aus t und s errechneten Geschwindigkeit $v = s/t$?

- A $\pm\,0{,}3\,\%$
- B $\pm\,0{,}5\,\%$
- C **$\pm\,1\,\%$**
- D $\pm\,5\,\%$
- E $\pm\,10\,\%$