WWU MÜNSTER

WS 2019/20

Übungen zur Physik I

Vorlesung: Prof. Dr. Nikos Doltsinis, Prof. Dr. Helmut Kohl
Übungen: PD Dr. Karol Kovařík, Dr. Lew Classen

Blatt 13

mündlich: 13. oder 14.01.20
schriftlich: 16. oder 17.01.20

Aufgabe 57: Gravitationsdrehwaage **(10 Punkte, mündlich)**

In der Cavendish-Waage (siehe Abbildung) führen die Kräfte $\vec{F}$ zwischen den Kugelpaaren m_1 und m_2 zu seinem Drehmoment M, durch das das Drehpendel mit den Massen m_1 (Trägheitsmoment J, Winkelrichtgröße D^*) um den Winkel φ aus der Ruhelage ausgelenkt wird. Dreht man nun das Massenpaar m_2 wie skizziert von der grauen in die weiß skizzierte Position, so ändert das Drehmoment und damit der Drehwinkel sein Vorzeichen.

Die Winkeländerung wird durch die Auslenkung eines am angebrachten Spiegel reflektierten Lichtstrahl gemessen. Bearbeiten Sie folgende Aufgaben:

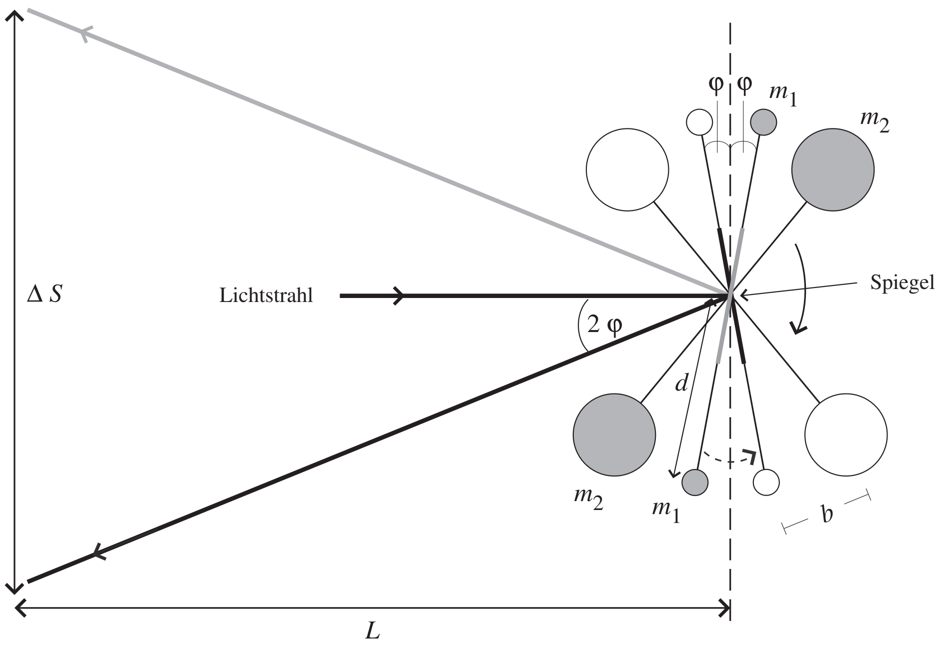
(a) (3 Punkte) Wie ist die Gravitationskonstante G mit dem Drehwinkel φ verknüpft?

(b) (4 Punkte) Wie kann die Winkelrichtgröße D^* aus der Schwingungsdauer des Drehpendels bestimmt werden? Welcher Ausdruck ergibt sich damit für die Gravitationskonstante? *Hinweis*: Bei der Auslenkung φ handelt es sich um einen kleinen Winkel.

(c) (3 Punkte) Für die Gravitationsdrehwaage aus der Versuchssammlung gelten folgende Werte:

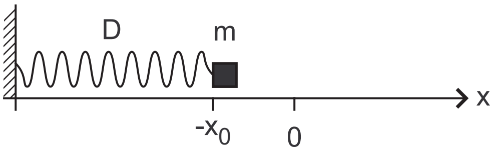
Abstand der Massenmittelpunkte von m_1 und m_2:	$b = 47\,\mathrm{mm}$
Abstand der Bleikugeln m_1 von der Drehachse:	$d = 5\,\mathrm{cm}$
Masse der großen Bleikugeln:	$m_2 = 1{,}5\,\mathrm{kg}$
Abstand zwischen Spiegel und Detektor:	$L = 0{,}7\,\mathrm{m}$

Während des Versuchs wurden folgende Werte gemessen: Schwingungsdauer $T = 590\,\mathrm{s}$, Abstand zwischen den Endlagen $\Delta S = (56{,}3 - 34{,}0)\mathrm{mm} = 22{,}3\,\mathrm{mm}$. Was ergibt sich daraus für die Gravitationskonstante G? Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Literaturwert.



Aufgabe 58: Harmonischer Oszillator **(7 Punkte, schriftlich)**

Gegeben sei eine Masse m, die unter dem Einfluss einer Federkraft $F = -Dx$ reibungsfrei schwingt.



(a) (3 Punkte) Geben Sie die Bewegungsgleichung an. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass diese durch

$$x(t) = C_1\,\mathrm{e}^{i\,\omega\,t} + C_2\,\mathrm{e}^{-i\,\omega\,t} \tag{1}$$

gelöst wird. Zeigen Sie, dass folgende drei Funktionen äquivalent zu (1) sind:

$$\begin{aligned} x(t) &= \tilde{C}_1\,\cos(\omega t) + \tilde{C}_2\,\sin(\omega t) \\ x(t) &= A \cdot \cos(\omega t + \phi) \\ x(t) &= B \cdot \sin(\omega t + \theta) \end{aligned}$$

Wie hängen C_1 und C_2 mit den jeweiligen ($\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$, bzw. A, ϕ, bzw. B, θ) Konstanten zusammen? Drücken Sie dazu Kosinus und Sinus durch komplexe Exponentialfunktionen aus.

(b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die jeweiligen Konstanten der vier oben genannten Darstellungen für die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \omega \cdot x_0$. Nehmen Sie an die Anfangswerte x_0 und $\omega \cdot x_0$ sind reel. Sind die Konstanten C_1, C_2, $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$, A, ϕ, B, θ reell oder komplex? Wie sieht es für die Funktion $x(t)$ aus?

(c) (2 Punkte) Berechnen Sie die kinetische und die potentielle Energie als Funktion der Zeit für die Anfangsbedingungen $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$. Benutzen Sie dazu irgendeine der oben angegebenen Lösungsfunktionen. Wählen Sie dabei die Konstante in der potentiellen Energie derart, dass $V(x = 0) = 0$ ist. Wie groß ist die Gesamtenergie E?

Aufgabe 59: Bungeespringen **(5 Punkte, schriftlich)**

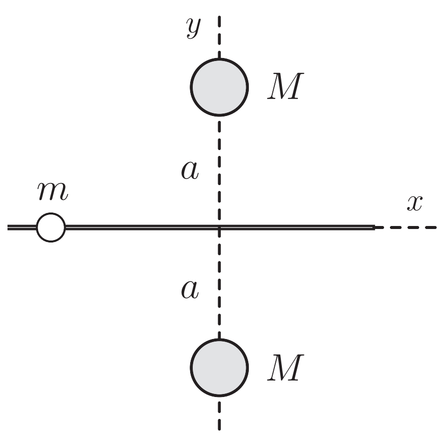
Ein Bungeespringer mit einer Masse von 80 kg steht auf einer Brücke 70 m über einem Fluss. Wie lang muss sein Seil sein, so dass er am tiefstem Punkt seines Sprungs gerade die Wasseroberfläche berührt? Nehmen Sie dabei an, das Seil funktioniert wie eine Feder mit einer Federkonstante $54\,\mathrm{Nm}^{-1}$.

Aufgabe 60: Schwingungen im Gravitationspotential **(8 Punkte, schriftlich)**

Eine Masse m gleitet reibungslos an einer dünnen Stange entlang der x-Achse. Die Achse verläuft zwischen zwei gleich großen Kugeln der Masse M (siehe Abbildung). Die Kugeln befinden sich stationär bei $x = 0$, $y = \pm\,a$ und ziehen die Masse m via Gravitation an.

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Gesamtkraft auf die Masse m die folgende Form hat:

$$\vec{F}(x) = -2\,\frac{m\,M\,G}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$



(b) (3 Punkte) Geben Sie die potenzielle Energie der Masse m in Abhängigkeit von x an. Die Masse wird bei $x = 3\,a$ mit einer Geschwindigkeit v_0 in Richtung des Koordinatenursprungs losgelassen. Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit sich die Masse durch den Koordinatenursprung bewegt.

(c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass für $x \ll a$ die Taylorentwicklung

$$\left(a^2 + x^2\right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{a^3}\left(1 - \frac{3}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + ...\right)$$

gilt.

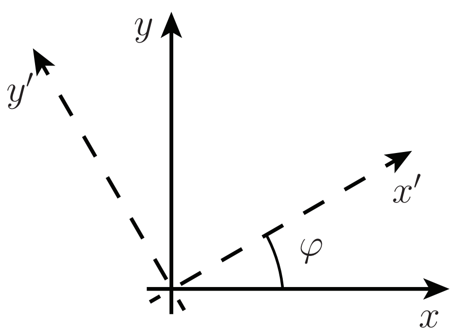
(d) (2 Punkte) Für kleine Auslenkungen aus dem Koordinatenursprung schwingt die Masse harmonisch um den Koordinatenursprung. Benutzen Sie die Ergebnisse aus (c), um die Bewegungsgleichung der Schwingung in harmonischer Näherung aufzustellen. Berechnen Sie die zugehörige Schwingungsfrequenz.

Aufgabe 61: Beschleunigung (5 Punkte, mündlich)

Sie steigen in einen Zug und hängen in Ihrem Abteil wie immer ein Fadenpendel auf. Praktisch während der gesamten Beschleunigungsphase des Zuges von 20 s zeigt das Fadenpendel eine konstante Auslenkung von ca. 8°. Welche Geschwindigkeit hat der Zug am Ende der Beschleunigungsphase erreicht ?

Aufgabe 62: Einfache Drehung (5 Punkte, mündlich)

Betrachten Sie zwei Bezugsysteme S und S' wobei man das neue Bezugsystem S' mit den Basisvektoren $\vec{e}\,'_x$ und $\vec{e}\,'_y$ aus dem ursprünglichen Bezugsystem S durch eine Drehung um den Winkel φ erhält (siehe Abbildung).



(a) (2 Punkte) Stellen Sie die neuen Einheitsvektoren $\vec{e}\,'_x$ und $\vec{e}\,'_y$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_y$ dar.

(b) (1 Punkt) Benutzen Sie die Ergebnisse aus dem Aufgabenteil (a) um eine Drehmatrix $D(\varphi)$ aufzustellen, die die Komponenten v_x und v_y eines Vektors $\vec{v}$ im Bezugsystem S in die neuen Komponenten v'_x und v'_y im Bezugsystem S' transformiert.

$$\begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \end{pmatrix} = D(\varphi).\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

(c) (2 Punkte) Zwei Vektoren sind durch

$$\vec{v}_1 = \left(\sqrt{3}\,,\,1\right), \qquad \vec{v}_2 = \left(2\,,\,\sqrt{12}\right).$$

im Bezugsystem S gegeben. Bestimmen Sie die Komponenten der Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ im Bezugsystem S', wenn der Drehwinkel $\varphi = 30°$ beträgt.