Aufgabe 1: Vektoren

a) Berechnen Sie den Betrag folgender Vektoren.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) Normieren Sie die Vektoren $\vec{a}$ bis $\vec{d}$.

c) Berechnen Sie mit den Vektoren $\vec{a}$ bis $\vec{d}$

$$\begin{array}{llll} \vec{a}+\vec{b}, & \vec{a}-\vec{b}, & \vec{a}\cdot\vec{b}, & \vec{a}\times\vec{b}, \\ \vec{a}+\vec{c}, & \vec{a}-\vec{c}, & \vec{a}\cdot\vec{c}, & \vec{a}\times\vec{c}, \\ \vec{a}+\vec{d}, & \vec{a}-\vec{d}, & \vec{a}\cdot\vec{d}, & \vec{a}\times\vec{d}. \end{array}$$

d) Wie groß ist der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$; $\vec{a}$ und $\vec{c}$; $\vec{a}$ und $\vec{d}$?

e) Wie muss k gewählt werden, damit die Länge des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 3 \end{pmatrix}$ gleich 8 ist?

Aufgabe 2: Koordinatendarstellung von Vektoren

Schreiben Sie die folgenden Vektoren in Koordinatendarstellung ($\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ seien die drei kartesischen Basisvektoren).

a) $\vec{e} = -3\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 - 12\vec{e}_3$

b) $\vec{f} = \vec{e}_3$

c) $\vec{g} = 2(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) - 7(\vec{e}_1 - \vec{e}_3) - 6(\vec{e}_2 + \vec{e}_3)$

d) $\vec{h} = 4(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2)\vec{e}_3 + 5(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) - 2(\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3)\vec{e}_3$

e) $\vec{i} = 3(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) - 6(\vec{e}_1 \times \vec{e}_3)$

f) $\vec{j} = (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3)\vec{e}_2 - (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) + (\vec{e}_3 \times \vec{e}_2)$

Aufgabe 3: Abstand von Punkten

Berechnen Sie jeweils den Abstand der beiden Punkte im Koordinatensystem.

a) $(3,4)$; $(-1,-4)$

b) $(6,-3)$; $(-6,1)$

c) $(1,2,3)$; $(4,5,6)$

Aufgabe 4: Darstellung einer Geraden

Bestimmen Sie die Parameterdarstellung sowie die parameterfreie Darstellung der Geraden, die durch die Punkte P, Q geht.

$$\mathrm{P} = (-1,1), \qquad \mathrm{Q} = (1,4)$$

Aufgabe 5: Differentiation

Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = x^8$

b) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1$

c) $f(x) = (2+x)(x^2+1)$

d) $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$

e) $f(x) = \frac{1}{2}x - \sqrt{x}$

f) $f(x) = x\sqrt{x}$

g) $f(x) = \cos(7x)$

h) $f(x) = 6\sin(6x) - 3\cos(-3x)$

i) $f(x) = x^3 + 2\sin(2\pi x)$

j) $f(x) = \sin\left(x^2\right)$

k) $f(x) = \sin^2(x)$

l) $f(x) = 2\left(x^2 - 3\sqrt{x}\right)^6$

m) $f(x) = \sqrt{2x - 6x^4}$

n) $f(x) = \frac{(1-2x)^4}{(3+5x)^2}$

o) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+2x}}$

p) $f(x) = \left(\frac{3x+2}{4x-2}\right)^2$

q) $f(x) = x^2 \cos(x)$

r) $f(x) = \sin(x)\cos(x)$

s) $f(x) = e^{2x-1}$

t) $f(x) = x^2 e^x$

u) $f(x) = e^{-x}\sin(x)$

v) $f(x) = e^{(x+1)^2}$

w) $f(x) = \ln\left(\sqrt{2}x\right)$

x) $f(x) = [\ln(x)]^{-1}$

y) $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

z) $f(x) = \sin[\ln(x)]$

Aufgabe 6: Extremwertbestimmung

Von einem rechteckigen Blatt mit den Seitenlängen B und T wird an jeder Ecke ein Quadrat der Seitenlänge a ausgeschnitten und aus dem Rest wird eine Schachtel, die oben offen ist, gebildet. Wie muss a gewählt werden, damit das Volumen der Schachtel maximal ist?

Aufgabe 7: Kurvendiskussion

Führen Sie eine Kurvendiskussion der Funktion

$$f(x) = -2x^3 - 5x^2 + 8x$$

durch. Diskutieren Sie insbesondere Symmetrie, asymptotisches Verhalten, Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte, und skizzieren Sie die Funktion.

Aufgabe 1: Vektoren

a) Beträge $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$

$|\vec{b}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$

$|\vec{c}| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + (-6)^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$

$|\vec{d}| = \sqrt{5^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{35}$

b) Vektoren normieren

$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \vec{b}_0 = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c}_0 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \vec{d}_0 = \begin{pmatrix} 5/\sqrt{35} \\ 3/\sqrt{35} \\ -1/\sqrt{35} \end{pmatrix}$

c) Vektoren komponentenweise addieren & subtrahieren

$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 1+4 \\ -1+3 \\ 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 1-4 \\ -1-3 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{a} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ -1+3 \\ 2-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 1+3 \\ -1-3 \\ 2+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\vec{a} + \vec{d} = \begin{pmatrix} 1+5 \\ -1+3 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} - \vec{d} = \begin{pmatrix} 1-5 \\ -1-3 \\ 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Skalarprodukte: Komponentenweise multiplizieren und aufaddieren.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 4 + (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 0 = 4 - 3 = 1$

$\vec{a} \cdot \vec{c} = 1 \cdot (-3) + (-1) \cdot 3 + 2 \cdot (-6) = -3 - 3 - 12 = -18$

$\vec{a} \cdot \vec{d} = 1 \cdot 5 + (-1) \cdot 3 + 2 \cdot (-1) = 5 - 3 - 2 = 0$

daraus folgt, dass $\vec{a}$ und $\vec{d}$ senkrecht zueinander sind.

Kreuzprodukte: Hier kommt es auf die Reihenfolge an. Tauscht man die Vektoren ändert sich das Vorzeichen.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot 0 - 2\cdot 3 \\ 2\cdot 4 - 1\cdot 0 \\ 1\cdot 3 - (-1)\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)(-6) - 2\cdot 3 \\ 2\cdot(-3) - 1\cdot(-6) \\ 1\cdot 3 - (-1)\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-6 \\ -6+6 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot(-1) - 2\cdot 3 \\ 2\cdot 5 - 1\cdot(-1) \\ 1\cdot 3 - (-1)\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Das Kreuzprodukt ist immer senkrecht auf den beiden Vektoren. $\vec{a}$ und $\vec{c}$ sind parallel, also ist der senkrechte Vektor nicht ausgezeichnet

$\Rightarrow \vec{a} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) Winkel zwischen Vektoren ergeben sich aus dem Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$

$$\Leftrightarrow \cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{1}{5\sqrt{6}} \Rightarrow \alpha \approx 85{,}3^\circ$$

$$\cos(\beta) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{-18}{3\sqrt{6}\sqrt{6}} = -1 \Rightarrow \beta = 180^\circ$$

$$\cos(\gamma) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{d}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{d}|} = 0 \Rightarrow \gamma = 90^\circ \quad \text{(bekannt aus c))}$$

e) Die Länge des Vektors ist sein Betrag:

$$\left|\begin{pmatrix}1\\k\\3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2+k^2+3^2} = \sqrt{10+k^2} \stackrel{!}{=} 8$$

$$\Rightarrow 10+k^2 = 64$$

$$\Leftrightarrow k^2 = 54 \Rightarrow k = \pm\sqrt{54}$$

Aufgabe 2: Koordinatendarstellung von Vektoren

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ haben die Länge 1 und sind senkrecht zueinander. Man kann sich die kartesischen Koordinaten vorstellen.

Es ist $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{für } i=j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$

und $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$, $\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$

$\Rightarrow$ $\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3$, $\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1$, $\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$

Kann man nachrechnen.

$$\vec{e} = -3\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - 12\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\5\\-12\end{pmatrix}$$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{g} = (2-7)\vec{e}_1 + (2-6)\vec{e}_2 + (7-6)\vec{e}_3 = \begin{pmatrix}-5\\-4\\1\end{pmatrix}$$

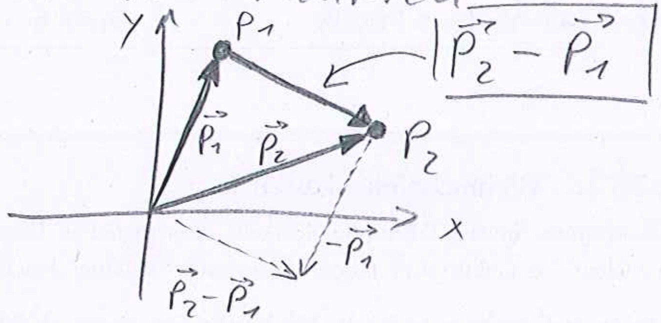
$$\vec{h} = 4\cdot\underbrace{(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2)}_{=0}\vec{e}_3 + 5(\vec{e}_1+\vec{e}_2) - 2\underbrace{(\vec{e}_3\cdot\vec{e}_3)}_{=1}\vec{e}_3 = \begin{pmatrix}5\\5\\-2\end{pmatrix}$$

$$\vec{i} = 3\underbrace{(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)}_{=\vec{e}_1} - 6\underbrace{(\vec{e}_1\times\vec{e}_3)}_{=-\vec{e}_2} = 3\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{j} = \underbrace{(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_3)}_{=0}\vec{e}_2 - \underbrace{(\vec{e}_1\times\vec{e}_2)}_{=\vec{e}_3} + \underbrace{(\vec{e}_3\times\vec{e}_2)}_{-\vec{e}_1} = \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Aufgabe 3: Abstand von Punkten

Skizze:



Der Abstand zw. den Punkten ist die Länge des Verbindungsvektors, also von $\vec{P_2}-\vec{P_1}$.

a) $\left|\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}\right| = \sqrt{4^2+8^2} = \sqrt{80}$

b) $\left|\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-6\\1\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}12\\-4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{12^2+4^2} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$

c) $\left|\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-3\\-3\\-3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{3\cdot 3^2} = 3\sqrt{3} = \sqrt{27}$

Aufgabe 4:

Parameterdarstellung: Gehe mit einem Vektor zur Geraden und verlänger den Verbindungsvektor zwischen den Punkten beliebig:

$$\vec{x} = \vec{p} + \lambda\cdot(\vec{Q}-\vec{P}) = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

Parameterfrei Darstellung (also ohne λ)

Betrachte $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\cdot\vec{u}$ hier $\vec{a}=P$, $\vec{u}=\vec{Q}-\vec{P}$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 = a_1 + \lambda u_1 \quad (\mathrm{I})$$
$$x_2 = a_2 + \lambda u_2 \quad (\mathrm{II}) \Leftrightarrow \lambda = \frac{x_2-a_2}{u_2}$$

$$\text{in (I)} \Rightarrow x_1 = a_1 + \frac{x_2-a_2}{u_2}u_1$$

$$\Leftrightarrow u_2x_1 - u_1x_2 = a_1u_2 - a_2u_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}u_2\\-u_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_2\\-u_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} u_2 \\ -u_1 \end{pmatrix}$ ist senkrecht zu $\vec{u}$ $\left[\begin{pmatrix} u_2 \\ -u_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = u_1 u_2 - u_1 u_2 = 0 \checkmark \right]$

also nennt man $\begin{pmatrix} u_2 \\ -u_1 \end{pmatrix} = \vec{n}$ den Normalenvektor

hier: $\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{p}$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -3 - 2 = -5$

Aufgabe 5: Differentiation

a) $f(x) = x^8 \rightarrow f'(x) = 8x^7$

b) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1 \rightarrow f'(x) = 9x^2 + 4x + 1$

c) $f(x) = 2x^2 + 2 + x^3 + x \rightarrow f'(x) = 3x^2 + 4x + 1$

d) $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = x^{-2} + x^{-1} \rightarrow f'(x) = -2x^{-3} - x^{-2}$
$= -\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2}$

e) $f(x) = \frac{1}{2}x - \sqrt{x} = \frac{1}{2}x - x^{1/2} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

f) $f(x) = x\sqrt{x}$ Ableiten mit Produktregel

$\rightarrow f'(x) = \sqrt{x} \cdot \frac{d}{dx}x + x \cdot \frac{d}{dx}\sqrt{x} = \sqrt{x} \cdot 1 + x \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

g) $f(x) = \cos(7x)$ Kettenregel $u(x) = \cos(x)$
$v(x) = 7x$

$\rightarrow f(x) = u[v(x)] \rightarrow f'(x) = v'(x) \cdot u'[v(x)]$

hier: $f'(x) = 7 \cdot [-\sin(7x)] = -7\sin(7x)$

h) $f(x) = 6\sin(6x) - 3\cos(-3x)$

$\rightarrow f'(x) = 6 \cdot 6 \cdot \cos(6x) - 3(-3)[-\sin(-3x)]$
$= 36\cos(6x) - 9\sin(-3x)$

i) $f(x) = x^3 + 2\sin(2\pi x)$

$\rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2\cdot(2\pi)\cdot\cos(2\pi x)$

$= 3x^2 + 4\cdot\pi\cos(2\pi x)$

j) $f(x) = \sin(x^2)$ $\qquad u(x) = \sin(x)$

$v(x) = x^2$

$\rightarrow f'(x) = 2x \cdot \cos(x^2)$

k) $f(x) = \sin^2(x)$ $\qquad u(x) = x^2$

$v(x) = \sin(x)$

Kettenregel:

$\rightarrow f'(x) = \cos(x)\cdot 2\sin(x) = 2\cos(x)\sin(x)$

oder Produktregel mit $f(x) = \sin(x)\cdot\sin(x)$

$\rightarrow f'(x) = \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x) = 2\cos(x)\sin(x)$

l) $f(x) = 2(x^2 - 3\sqrt{x})^6$ $\qquad u(x) = x^6$

$v(x) = x^2 - 3\sqrt{x}$

$\rightarrow f'(x) = 2\cdot\underbrace{\left(2x - \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}_{v'(x)}\cdot\underbrace{6\cdot(x^2 - 3\sqrt{x})^5}_{u'[v(x)]}$

$= 12\left(2x - \frac{3}{2\sqrt{x}}\right)(x^2 - 3\sqrt{x})^5$

m) $f(x) = \sqrt{2x - 6x^4}$ $\qquad u(x) = \sqrt{x}$

$v(x) = 2x - 6x^4$

$\rightarrow f(x) = \underbrace{(2 - 24x^3)}_{v'(x)}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2x - 6x^4}}}_{u'[v(x)]} = \frac{1 - 12x^3}{\sqrt{2x - 6x^4}}$

n) $f(x) = \dfrac{(1-2x)^4}{(3+5x)^2}$ NR: $\dfrac{d}{dx}(1-2x)^4 = -2 \cdot 4(1-2x)^3$

$\dfrac{d}{dx}(3+5x)^2 = 5 \cdot 2 \cdot (3+5x)$

Quotientenregel:

$$\to f'(x) = \frac{-8(1-2x)^3 \cdot (3+5x)^2 - (1-2x)^4 \cdot 10 \cdot (3+5x)}{(3+5x)^4}$$

$$= \frac{[-8(1-2x)^3(3+5x) - 10(1-2x)^4]\cancel{(3+5x)}}{(3+5x)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{[-8(3+5x) - 10(1-2x)](1-2x)^3}{(3+5x)^3}$$

$$= (-24-40x-10+20x) \cdot \left(\frac{1-2x}{3+5x}\right)^3$$

$$= (-34-20x)\left(\frac{1-2x}{3+5x}\right)^3$$

o) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+2x}}$ NR: $\dfrac{d}{dx}\sqrt{1+2x} = 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$

Quotientenregel:

$$\to f'(x) = \frac{1\sqrt{1+2x} - x \cdot \frac{1}{\sqrt{1+2x}}}{1+2x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+2x}} \cdot \frac{(1+2x)-x}{1+2x} = \frac{1+x}{(1+2x)^{3/2}}$$

p) $f(x) = \left(\dfrac{3x+2}{4x-2}\right)^2$ $u(x) = x^2$, $v(x) = \dfrac{3x+2}{4x-2}$

$$\to f'(x) = \underbrace{2 \cdot \frac{3x+2}{4x-2}}_{u'[v(x)]} \cdot \underbrace{\frac{3 \cdot (4x-2) - 4 \cdot (3x+2)}{(4x-2)^2}}_{v'(x)}$$

$$= 2 \cdot (3x+2) \cdot \frac{\cancel{12x} - 6 - \cancel{12x} - 8}{(4x-2)^3} = -28 \cdot \frac{3x+2}{(4x-2)^3}$$

q) $f(x) = x^2 \cos(x)$ Produktregel

$\rightarrow f(x) = 2x \cos(x) + x^2 [-\sin(x)]$

$= 2x \cos(x) - x^2 \sin(x)$

r) $f(x) = \sin(x) \cos(x)$ Produktregel

$\rightarrow f(x) = \cos(x) \cos(x) + \sin(x) [-\sin(x)]$

$= \cos^2(x) - \sin^2(x)$

s) $f(x) = e^{2x-1}$

$u(x) = e^x$

$v(x) = 2x - 1$

$\rightarrow f(x) = \underset{v'(x)}{2}\, \underbrace{e^{2x-1}}_{u'[v(x)]}$

t) $f(x) = x^2 e^x$ Produktregel

$\rightarrow f'(x) = 2x e^x + x^2 e^x = e^x (2x + x^2)$

u) $f(x) = e^{-x} \sin(x)$ Produktregel

$\rightarrow f'(x) = -e^{-x} \sin(x) + e^{-x} \cos(x)$

$= e^{-x} [\cos(x) - \sin(x)]$

v) $f(x) = e^{(x+1)^2}$

$u(x) = e^x$

$v(x) = (x+1)^2$

$\rightarrow v'(x) = 2(x+1)$

$\rightarrow f'(x) = \underbrace{2(x+1)}_{v'(x)} \underbrace{e^{(x+1)^2}}_{u'[v(x)]}$

w) $f(x) = \ln(\sqrt{2}\, x)$

$u(x) = \ln(x)$

$v(x) = \sqrt{2}\, x$

$\rightarrow f(x) = \underbrace{\sqrt{2}}_{v'(x)} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}\, x}}_{u'[v(x)]} = \frac{1}{x}$

x) $f(x) = [\ln(x)]^{-1}$ $\qquad u(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$

$\qquad v(x) = \ln(x)$

$\rightarrow f(x) = \frac{1}{x} \cdot (-1)[\ln(x)]^{-2}$

$= -\frac{1}{x[\ln(x)]^2}$

y) $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ $\qquad u(x) = \ln(x)$

$\qquad v(x) = \frac{x}{x+1}$

$\qquad \rightarrow v'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2}$

$\rightarrow f(x) = \underbrace{\frac{1}{(x+1)^2}}_{v'(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\frac{x}{x+1}}}_{u'[v(x)]} = \frac{1}{(x+1)^2} \cdot \frac{x+1}{x} = \frac{1}{x(x+1)}$

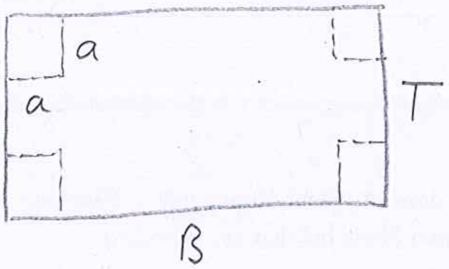
z) $f(x) = \sin[\ln(x)]$ $\qquad u(x) = \sin(x)$

$\qquad v(x) = \ln(x)$

$\rightarrow f'(x) = \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'(x)} \cdot \underbrace{\cos[\ln(x)]}_{u'[v(x)]}$

Aufgabe 6: Extremwertbestimmung

Skizze:



Volumen der Schachtel:

$$V = (B-2a)(T-2a)\cdot a$$

$$= 4a^3 - 2a^2(B+T) + BTa$$

Extremwert für $V'(a) = \frac{dV}{da} \stackrel{!}{=} 0$

$$\rightarrow \frac{dV}{da} = 12a^2 - 4a(B+T) + BT \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - \frac{1}{3}(B+T)\,a + \frac{1}{12}BT = 0$$

$$\Rightarrow a_{1,2} = \frac{1}{6}(B+T) \pm \sqrt{\frac{1}{36}(B+T)^2 - \frac{1}{12}BT}$$

welches Vorzeichen führt zu einem Maximum?

$$V''(a) = \frac{d^2V}{da^2} = 24a - 4(B+T)$$

$a_{1,2}$ einsetzen:

$$V''(a_{1,2}) = \cancel{\frac{24}{6}(B+T)} \pm 24 \cdot \frac{1}{6}\sqrt{(B+T)^2 - 3BT} \cancel{- 4(B+T)}$$

$$= \pm \underbrace{4\sqrt{(B+T)^2 - 3BT}}_{>0}$$

Maximum für $V'' < 0$!

also führt „−" Lösung zum maximalen Schachtelvolumen.

Aufgabe 1: Kurvendiskussion

$$f(x) = -2x^3 - 5x^2 + 8x$$

hat keine Symmetrie (gerade + ungerade Potenzen)

$$f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty, \quad f(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} -\infty$$

Nullstellen: $-2x^3 - 5x^2 + 8x = 0$

$$\Leftrightarrow x(-2x^2 - 5x + 8) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad \vee \quad x^2 + \frac{5}{2}x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x_{2,3} = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} + 4} = -\frac{5}{4} \pm \frac{\sqrt{89}}{4}$$

$$\Rightarrow x_2 \approx 1{,}11, \quad x_3 \approx -3{,}61$$

Ableitungen: $f'(x) = -6x^2 - 10x + 8$

$$f''(x) = -12x - 10$$

$$f'''(x) = -12$$

Extrema: $f'(x) \overset{!}{=} 0$

$$\rightarrow -6x^2 - 10x + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{4}{3} = 0$$

$$\Rightarrow x_{4,5} = -\frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{25}{36} + \frac{4}{3}} = -\frac{5}{6} \pm \frac{\sqrt{73}}{6}$$

$$\Rightarrow x_4 \approx 0{,}59, \quad x_5 \approx -2{,}26$$

$$f''(x_4) = \cancel{+10} - 2\sqrt{73} \cancel{-10} < 0 \quad \text{(Maximum)}$$

$$f''(x_5) = \cancel{+10} + 2\sqrt{73} \cancel{-10} > 0 \quad \text{(Minimum)}$$

Wendepunkt: $f''(x) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow -12x - 10 = 0$

$$\Rightarrow x_6 = -\frac{10}{12} = -\frac{5}{6} \approx -0{,}83$$

Funktionswerte der berechneten Stellen:

$f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 0$, $f(x_3) = 0$

$f(x_4) \approx 2{,}57$, $f(x_5) \approx -20{,}53$, $f(x_6) \approx -8{,}98$