Aufgabe 1: Gleichungen

Lösen Sie folgende Gleichungen nach x auf.

a) $20x^2 + 5x = 0$

b) $15x^2 - 4x - 2(73x+10) = -(-x+10)(2+15x)+7$

c) $x^2 + 2x + 1 = 0$

d) $-2x + 2 - (x+1)(x-1) + x^2 = -1$

e) $\frac{1}{4}(4x+8) = \frac{2}{3}(6x-15)$

f) $x^2 - 9x + 14 = 0$

g) $x(x-5) = 2(1-2x)$

h) $x - 4 = \frac{x}{x-6}$

i) $2 + 2x = \frac{x+1}{x-1}$

j) $x^2 - 8x + 9 = 0$

k) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

l) $x^5 + 10x = 7x^3$

m) $2x + \sqrt{25 - x^2} = 0$

n) $\sqrt{x-2} = \sqrt{x} - \sqrt{2}$

o) $\sqrt{4x+9} - \sqrt{3x-5} = 2$

p) $x - 29\sqrt{x} = -100$

q) $3^{2x-1} = 3^{3x+5}$

r) $2^{2x+1} + 2^{2x+1} = 2^{5x-7}$

s) $12 \cdot 3^{2x-3} \cdot 2^{x-3} = 6^{x-1}$

t) $2^{-x+3} \cdot 5^{2x+12} = 10^{3x+15}$

Aufgabe 2: Lineare Gleichungssysteme

Lösen Sie folgende Gleichungssysteme.

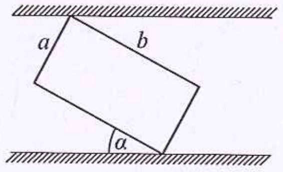
a)
$$\begin{aligned} 3x + y &= 7 \\ 4x - 2y &= 6 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x - 5y &= -1 \\ 5x - 8y &= 11 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 2x - y + 4z &= 5 \\ 5x + 2y - 10z &= 7 \\ 12x - 9y - 8z &= 11 \end{aligned}$$

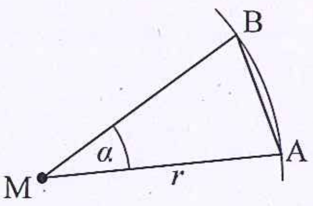
Aufgabe 3: Trigonometrie

Eine rechteckige Kiste mit den Kantenlängen $a = 1.60$ m und $b = 3.10$ m blockiert eine Durchfahrt.
Wie breit ist die Durchfahrt, wenn $\alpha = 28°$ ist?



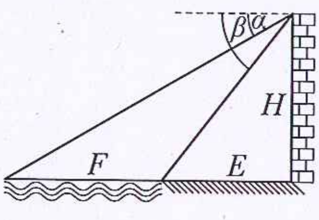
Aufgabe 4: Flächen von Dreiecken

Wir betrachten einen Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r, in dem das Dreieck MAB liegt. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks. Benutzen Sie diese Formel um den Flächeninhalt eines regelmäßigen n-Ecks, das in dem Kreis liegt, auszurechnen.



Aufgabe 5: Trigonometrie

Ein Turm der Höhe $H = 30$ m steht in der Entfernung E von einem Fluss der Breite F entfernt. Eine Person auf dem Turm blickt auf den Fluss. Sie sieht das entfernte Ufer unter einem Tiefenwinkel von $\alpha = 14°$ und das nahe liegende Ufer unter einem Tiefenwinkel von $\beta = 30°$.
Wie breit ist der Fluss und wie weit ist er vom Turm entfernt?



Aufgabe 6: Sinus- und Kosinussatz

Berechnen Sie (mit dem Sinus- und Kosinussatz) die fehlenden Seiten und Winkel im Dreieck:

a) $a = 4.6$ cm $\quad b = 6.4$ cm $\quad \beta = 33°$

b) $b = 2.6$ cm $\quad c = 3.5$ cm $\quad \alpha = 147.5°$

c) $a = 86$ mm $\quad b = 5$ cm $\quad c = 6.1$ cm

Aufgabe 7: Zeitfunktionen

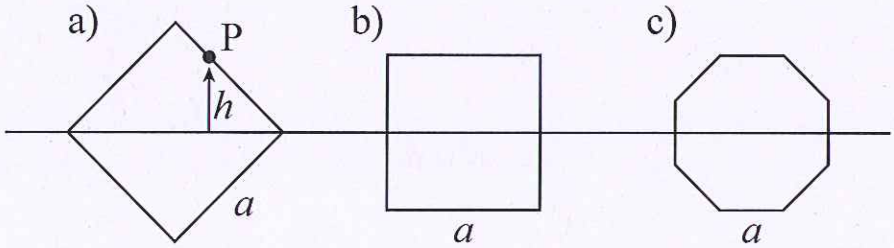
Ein Punkt P bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit auf den Kanten

a) eines auf der Spitze stehenden Quadrats der Seitenlänge a

b) eines auf der Seite stehenden Quadrats der Seitenlänge a

c) eines regelmäßigen Achtecks der Seitenlänge a.

Skizzieren Sie seine Höhe $h(t)$ als Funktion der Zeit. Welchen Einfluss hat die Wahl des Startpunkts?



Aufgabe 8: Additionstheoreme

Benutzen Sie die Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha) \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\beta)\sin(\alpha) \end{aligned}$$

um folgende Beziehung zu zeigen:

$$\sin(4\alpha) = 4\left[\sin(\alpha)\cos^3(\alpha) - \sin^3(\alpha)\cos(\alpha)\right]$$

Aufgabe 9: Schnittwinkel von Geraden

Bestimmen Sie den Schnittwinkel der beiden Geraden

$$f(x) = -2x + 5 \qquad \text{und} \qquad g(x) = \frac{3}{2}x + 1\,.$$

Aufgabe 10: Polarkoordinaten

Stellen Sie folgende Punkte in Polarstellung dar.

a) $P = (1, 1)$ $\quad$ b) $P = (-1, -1)$ $\quad$ c) $P = (4, -3)$ $\quad$ d) $P = (7.5, 15)$ $\quad$ e) $P = (17, 1)$

Berechnen Sie die kartesischen Koordinaten folgender Punkte.

f) $r = 5$, $\phi = 395°$ $\quad$ g) $r = 7$, $\phi = \frac{4\pi}{6}$ $\quad$ h) $r = 2$, $\phi = 45°$

Aufgabe 1: Gleichungen

a) $20x^2+5x=0 \Leftrightarrow 5x(4x+1)=0 \Leftrightarrow x=0 \lor x=\frac{1}{4}$

b) $15x^2-4x-2(73x+10) = -(-x+10)(2+15x)+7$

$\Leftrightarrow 15x^2-4x-146x-20 = 2x-20+15x^2-150x+7$

$\Leftrightarrow \quad 0 = 2x+7 \Leftrightarrow x=-\frac{7}{2}$

c) $x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow (x+1)^2=0 \Leftrightarrow x=-1$

d) $-2x+2-(x+1)(x-1)+x^2=-1$

$\Leftrightarrow -2x-x^2+1+x^2=-3$

$\Leftrightarrow -2x=-4 \Leftrightarrow x=2$

e) $\frac{1}{4}(4x+8) = \frac{2}{3}(6x-15)$

$\Leftrightarrow x+2 = 4x-10 \Leftrightarrow 3x=12 \Leftrightarrow x=4$

f) $x^2-9x+14=0 \Leftrightarrow (x-7)(x-2)=0$

oder p-q-Formel $\Leftrightarrow x=7 \lor x=2$

$x_{1,2} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}-\frac{56}{4}} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{9\pm 5}{2} = 7 \lor 2$

g) $x(x-5)=2(1-2x)$

$\Leftrightarrow x^2-5x=2-4x \Leftrightarrow x^2-x-2=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+1)=0 \Leftrightarrow x=2 \lor x=-1$

h) $x-4=\frac{x}{x-6} \Leftrightarrow (x-4)(x-6)=x$

$\Leftrightarrow x^2-11x+24=0$

$\Leftrightarrow (x-8)(x-3)=0 \Leftrightarrow x=8 \lor x=3$

i) $2+2x=\frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow 2(x+1)(x-1)=x+1$

$\Leftrightarrow 2(x+1)(x-1)-(x+1)=0$

$\Leftrightarrow (x+1)(2x-2-1)=0 \Leftrightarrow x=-1 \lor x=\frac{3}{2}$

j) $$x^2-8x+9=0 \Leftrightarrow x^2-8x+16-16+9=0$$
$$\Leftrightarrow (x-4)^2=7 \Leftrightarrow \underline{x=4\pm\sqrt{7}}$$

k) $$x^4-3x^2+2=0 \Leftrightarrow (x^2-2)(x^2-1)=0$$
$$\Leftrightarrow \underline{x=\pm\sqrt{2}} \lor \underline{x=\pm 1}$$

l) $$x^5+10x=7x^3 \Leftrightarrow x(x^4-7x^2+10)=0$$
$$\Leftrightarrow x(x^2-5)(x^2-2)=0 \Leftrightarrow \underline{x=0} \lor \underline{x=\pm\sqrt{5}} \lor \underline{x=\pm\sqrt{2}}$$

m) $$2x+\underbrace{\sqrt{25-x^2}}_{>0}=0 \Rightarrow 25-x^2=4x^2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{5}$$
$$>0 \Rightarrow 2x<0 \Rightarrow \underline{x=-\sqrt{5}}$$ ist einzige Lsg.

n) $$\sqrt{x-2}=\sqrt{x}-\sqrt{2} \Leftrightarrow x-2=x-2\sqrt{2}\sqrt{x}+2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2x}=2 \Leftrightarrow \underline{x=2}$$

o) $$\sqrt{4x+9}-\sqrt{3x-5}=2$$
$$\Rightarrow 4x+9-2\sqrt{(4x+9)(3x-5)}+3x-5=4$$
$$\Rightarrow 4(4x+9)(3x-5)=(7x)^2$$
$$\Leftrightarrow 48x^2+28x-180=49x^2$$
$$\Leftrightarrow x^2-28x+180=0 \Leftrightarrow (x-10)(x-18)=0$$
$$\Leftrightarrow \underline{x=10} \lor \underline{x=18}$$ beide erfüllen die Gl.

p) $$x-29\sqrt{x}=-100$$ Substitution $t=\sqrt{x}$
$$\Rightarrow t^2-29t+100=0 \Leftrightarrow (t-25)(t-4)=0$$
$$\Leftrightarrow t=25 \lor t=4$$
$$\Rightarrow \underline{x=625} \lor \underline{x=16}$$

q) $$3^{2x-1}=3^{3x+5}$$
$$\xRightarrow{\log_3} 2x-1=3x+5 \Leftrightarrow \underline{x=-6}$$

r) $2^{2x+1} + 2^{2x+1} = 2^{5x-7} \Leftrightarrow 2 \cdot 2^{2x+1} = 2^{5x-7}$

$\Leftrightarrow 2^{2x+2} = 2^{5x-7} \overset{\log_2}{\Rightarrow} 2x+2 = 5x-7 \Leftrightarrow \underline{x = 3}$

s) $12 \cdot 3^{2x-3} \cdot 2^{x-3} = 6^{x-1}$

$\Leftrightarrow 3 \cdot 3^{2x-3} \cdot 2^2 \cdot 2^{x-3} = (3 \cdot 2)^{x-1}$

$\Leftrightarrow 3^{2x-2} \cdot 2^{x-1} = 3^{x-1} \cdot 2^{x-1}$ $\qquad 2^{x-1} \neq 0$

$\overset{\log_3}{\Rightarrow} 2x-2 = x-1 \Leftrightarrow \underline{x = 1}$

t) $2^{-x+3} \cdot 5^{2x+12} = 10^{3x+15}$

$\overset{\ln}{\Rightarrow} \ln(2^{-x+3}) + \ln(5^{2x+12}) = \ln(10^{3x+15})$

$\Leftrightarrow (-x+3)\ln(2) + (2x+12)\ln(5) = (3x+15)\ln(10)$

$= (3x+15)[\ln(2) + \ln(5)]$

$\Leftrightarrow -4x\ln(2) - x\ln(5) = 12\ln(2) + 3\ln(5)$

$\Leftrightarrow x = -3\frac{4\ln(2) + \ln(5)}{4\ln(2) + \ln(5)} \Leftrightarrow \underline{x = -3}$

Aufgabe 2: Lineare Gleichungssysteme

a) $3x + y = 7 \quad (I)$
$4x - 2y = 6 \quad (II)$

$(II) + 2 \cdot (I) \Rightarrow 10x = 20 \Leftrightarrow \underline{x = 2}$

$(I) \Rightarrow 6 + y = 7 \Leftrightarrow \underline{y = 1}$

b) $2x - 5y = -1 \quad (I) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(5y-1)$
$5x - 8y = 11 \quad (II)$ in $(II) \Rightarrow \frac{5}{2}(5y-1) - 8y = 11$

$\Leftrightarrow 25y - 16y = 22 + 5$

$\Leftrightarrow 9y = 27 \Leftrightarrow \underline{y = 3}$

in $(I) \Rightarrow 2x = -1 + 15$

$\Leftrightarrow \underline{x = 7}$

c) $2x - y + 4z = 5 \quad (I)$

$5x + 2y - 10z = 7 \quad (II)$

$12x - 9y - 8z = 11 \quad (III)$

$(II) - \frac{5}{2}\cdot(I) \Rightarrow 2y + \frac{5}{2}y - 10z - 10z = 7 - \frac{25}{2} \quad | \cdot 2$

$\Leftrightarrow 9y - 40z = -11 \quad (A)$

$(III) - 6\cdot(I) \Rightarrow -9y + 6y - 8z - 24z = 11 - 30$

$\Leftrightarrow -3y - 32z = -19 \quad (B)$

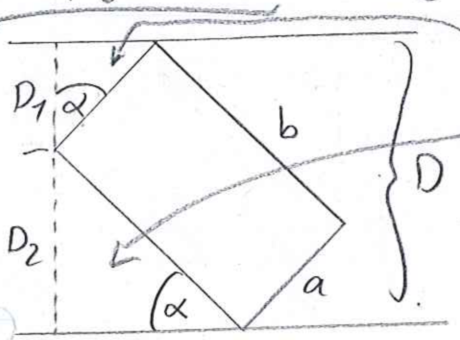
$(A) + 3\cdot(B) \Rightarrow -40z - 96z = -11 - 57$

$\Leftrightarrow \underline{z} = \frac{68}{136} = \underline{\frac{1}{2}}$

in (B) $\Rightarrow -3y - 16 = -19 \Leftrightarrow \underline{y = 1}$

in (I) $\Rightarrow 2x - 1 + 2 = 5 \Leftrightarrow \underline{x = 2}$

Aufgabe 3: Trigonometrie



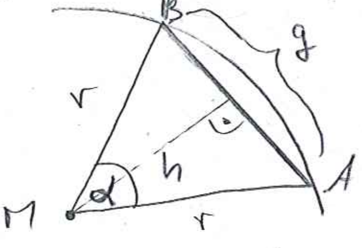
oberes Δ: $\cos(\alpha) = \frac{D_1}{a}$

unteres Δ: $\sin(\alpha) = \frac{D_2}{b}$

$\Rightarrow D = D_1 + D_2 = a\cos(\alpha) + b\sin(\alpha)$

$\Rightarrow D \simeq 2{,}87\,m$

Aufgabe 4: Flächen von Dreiecken



$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \frac{h}{r}$, $\sin(\frac{\alpha}{2}) = \frac{g/2}{r}$

$\Rightarrow$ Fläche: $A_\Delta = \frac{1}{2}g\cdot h = r^2\sin(\frac{\alpha}{2})\cos(\frac{\alpha}{2})$

$= \frac{1}{2}r^2\sin(\alpha)$

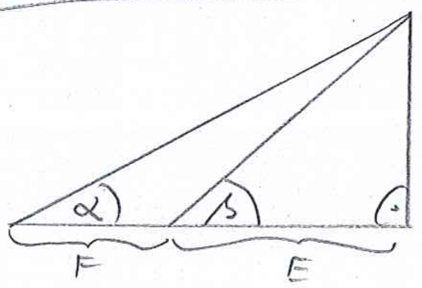
Ein regelmäßiges n-Eck besteht aus n Dreiecken mit

$\alpha_n = \frac{360°}{n} \Rightarrow A_{n\text{-Eck}} = n\cdot\frac{r^2}{2}\sin\left(\frac{360°}{n}\right)$

Beispiel: Quadrat. $A_\square = 4\cdot\frac{r^2}{2}\cdot\sin(90°) = 2r^2$

Kantenlänge $a = \sqrt{2}\,r \Rightarrow A_\square = a^2$ ✓

Aufgabe 5: Trigonometrie

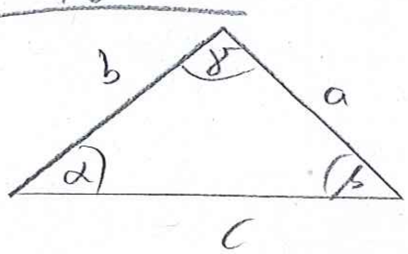


$\tan(\alpha) = \frac{H}{F+E} \Rightarrow E+F = \frac{H}{\tan(\alpha)} \approx 120\,m$

$\tan(\beta) = \frac{H}{E} \Rightarrow E = \frac{H}{\tan(\beta)} \approx 52\,m$

$\Rightarrow F \approx 120\,m - 52\,m = 68\,m$

Aufgabe 6: Sinus- und Kosinussatz



Sinussatz: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$ (S)

Kosinussatz:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$ (K1)

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$ (K2)

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$ (K3)

a) $a = 4.6\,cm$; $b = 6.4\,cm$; $\beta = 33°$

(S) $\Rightarrow \sin(\alpha) = \frac{a}{b}\sin(\beta) \Rightarrow \underline{\alpha \approx 23°}$

(K1–K2) $\Rightarrow c = \frac{a^2 - b^2}{a\cos(\beta) - b\cos(\alpha)} \Rightarrow \underline{c \approx 9.7\,cm}$

$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow \underline{\gamma \approx 124°}$ [$(S) \Rightarrow \gamma = 55°$ ↯]

b) $b = 2.6\,cm$; $c = 3.5\,cm$; $\alpha = 147.5°$

(K1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \Rightarrow \underline{a \approx 5.9\,cm}$

(S) $\sin(\beta) = \frac{b}{a}\sin(\alpha) \Rightarrow \underline{\beta \approx 13.8°}$

(S) $\sin(\gamma) = \frac{c}{a}\sin(\alpha) \Rightarrow \underline{\gamma \approx 18.7°}$

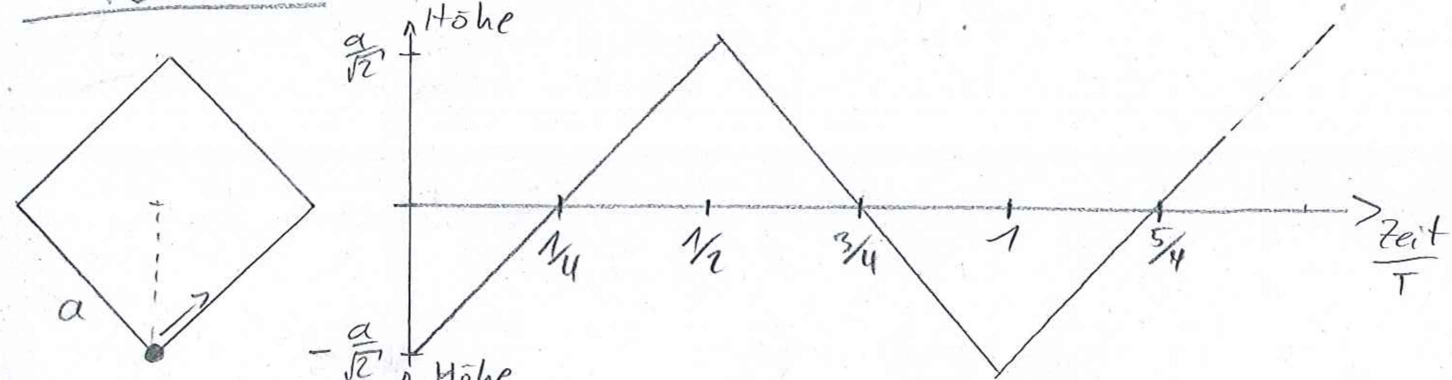
c) $a = 8.6\,cm$; $b = 5\,cm$; $c = 6.1\,cm$

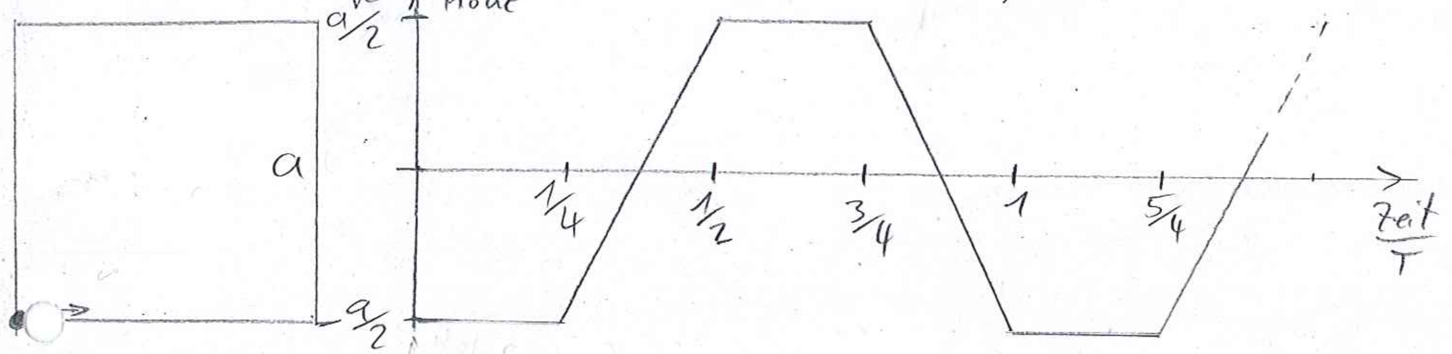
(K1) $\cos(\alpha) = \frac{1}{2bc}(b^2 + c^2 - a^2) \Rightarrow \underline{\alpha \approx 101.1°}$

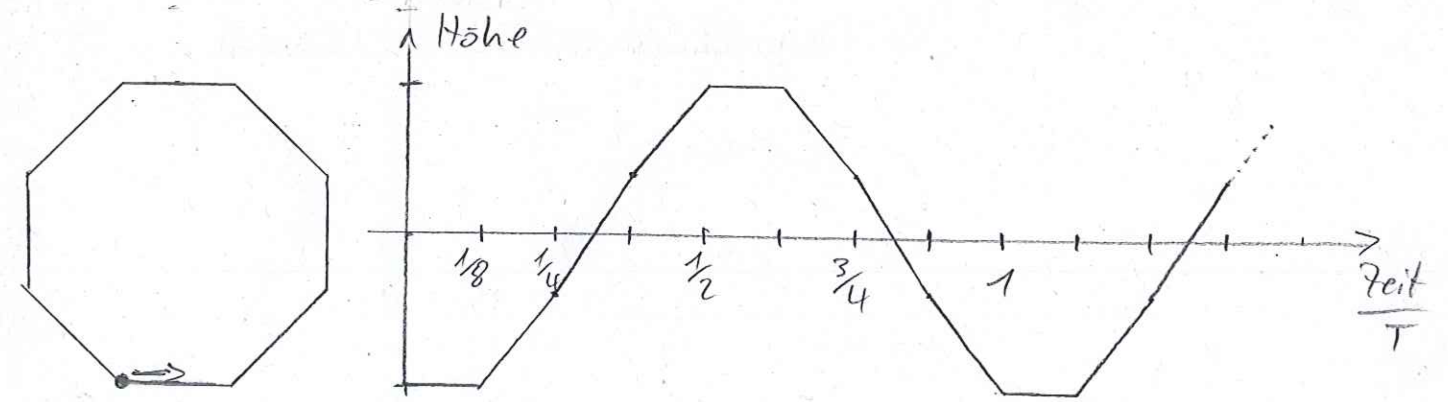
(K2) $\cos(\beta) = \frac{1}{2ac}(a^2 + c^2 - b^2) \Rightarrow \underline{\beta \approx 34.8°}$

$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow \underline{\gamma \approx 44.1°}$

Aufgabe 7: Zeitfunktionen







Anderer Startpunkt ändert die Phase, bzw. verschiebt die Kurve entlang der Zeit-Achse.

Aufgabe 8: Additionstheoreme

mit $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$

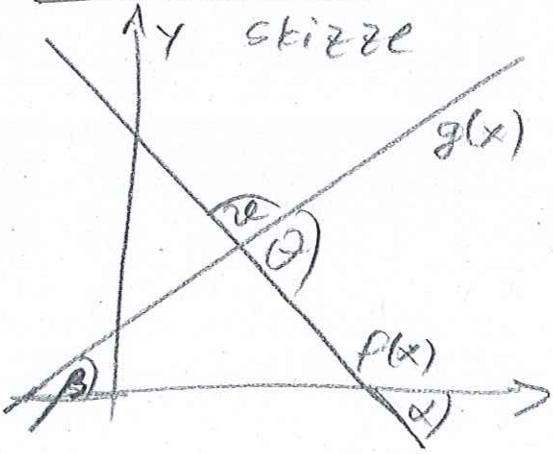
$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$

$$\rightarrow \sin(4\alpha) = \sin[2(2\alpha)] = 2\sin(2\alpha)\cos(2\alpha)$$

$$= 2\,[2\sin(\alpha)\cos(\alpha)]\,[\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)]$$

$$= 4\,[\sin(\alpha)\cos^3(\alpha) - \sin^3(\alpha)\cos(\alpha)]$$

Aufgabe 9: Schnittwinkel von Geraden



$\Theta = \alpha + \beta$

α und β aus Steigungen

$\tan(\alpha) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \Rightarrow \alpha = 63{,}4°$

$\tan(\beta) = \frac{3}{2} \Rightarrow \beta = 56{,}3°$

$\Rightarrow \Theta = 119{,}7°$

oder $\vartheta = 180° - \Theta = 60{,}3°$

Aufgabe 10: Polarkoordinaten

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ Definitionsb. beachten!

a) $r = \sqrt{2}$, $\varphi = 45°$

b) $r = \sqrt{2}$, $\varphi = 225°$

c) $r = 5$, $\varphi = \arctan\left(-\frac{3}{4}\right) \approx 323{,}1°$

d) $r \approx 16{,}7$, $\varphi = \arctan(2) \approx 63{,}4°$

e) $r \approx 17$, $\varphi = \arctan\left(\frac{1}{17}\right) \approx 3{,}4°$

$x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$

f) $(4.10,\ 2.87)$

g) $(-3.5,\ 6.06)$

h) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$