

Mathe-Repetitorium zur Physik I

Vorlesung: Prof. Dr. P.Krüger, Prof. Dr. A.Kappes
Mathe-Rep: Dr. K.Kovařík

Woche 11 & 12 - Integration II

Aufgabe 1: Linien Integrale erster Art

Berechnen Sie folgende linien Integrale entlang des angegebenen Pfades

(a) $\int_C xy \, ds$ wo C ist ein Rechteck gegeben durch Geraden $x = 0, x = 4, y = 0$ und $y = 2$

(b) $\int_C x^2 \, ds$ wo C ist ein Bogen einer Kurve gegeben durch $y = \ln x$ zwischen den Punkten $A = (2, \ln 2)$ und $B = (1, 0)$.

(c) $\int_C x^2y \, ds$ wo C ist ein Bogen eines Kreises gegeben durch $x^2 + y^2 = a^2$ zwischen den Punkten $A = (a, 0)$ und $B = (0, a)$.

(d) $\int_C x^2y \, ds$ wo C ist ein Bogen einer Ellipse $\vec{r} = a \cos t \vec{e}_x + b \sin t \vec{e}_y$ für $t \in (0, 2\pi)$.

(e)* $\int_C x \, ds$ wo C ist ein Bogen einer logarithmischen Spirale $r(\varphi) = ae^{b\varphi}$ der sich im Kreis $r \leq a$ befindet.

Aufgabe 2: Linien Integrale zweiter Art

Berechnen Sie folgende linien Integrale für zwei verschiedene Pfade

(a) $\int_A^B (2xy, x^2) \cdot d\vec{r}$ von $A = (0, 0)$ bis $B = (2, 1)$

(b) $\int_A^B (x^4 + 4xy^3, 6x^2y^2 - 5y^4) \cdot d\vec{r}$ von $A = (-2, -1)$ bis $B = (3, 0)$

(c) $\int_A^B (2xy^2 + 3x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{2x}{y^2}, 2x^2y + 3y^2 + \frac{1}{y^2} - \frac{2x^2}{y^3}) \cdot d\vec{r}$ von $A = (2, 1)$ bis $B = (1, 2)$

(d) $\int_A^B \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \cdot d\vec{r}$ von $A = (3, 4)$ bis $B = (5, 12)$

Hängen die Integrale von gewählten Pfad ab?

Aufgabe 3: Länge, Masse und Schwerpunkt einer Kurve

- (a) Berechnen Sie die Länge einer Astroid gegeben durch $\vec{r} = a \cos^3 t \vec{e}_x + a \sin^3 t \vec{e}_y$ für $t \in (0, 2\pi)$.
- (b) Bestimmen Sie die Masse eines Bogens $\vec{r} = a \left(t \vec{e}_x + \frac{t^2}{2} \vec{e}_y + \frac{t^3}{3} \vec{e}_z \right)$ für $t \in (0, 1)$ wo die Längendichte ist $\mu(x, y, z) = \sqrt{2y/a}$.
- (c) Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunkts einer homogenen ($\mu = 1$) Spirale $\vec{r} = a \cos t \vec{e}_x + a \sin t \vec{e}_y + kt \vec{e}_z$ für $t \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Aufgabe 4: Arbeit

Berechnen Sie die verrichtete Arbeit wenn man einen Massenpunkt entlang eines Kreises $x^2 + y^2 = a^2$ im Kraftfeld $\vec{F} = (x + y) \vec{e}_x + x \vec{e}_y$ bewegt.

Aufgabe 5: Zweidimensionale Integrale

Berechnen Sie folgende zweifache Integrale

- (a) $\iint_A x \sin y \, dx \, dy$ wo $A = \langle 1, 2 \rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.
- (b) $\iint_A (5x^2 - 2xy) \, dx \, dy$ wo A ist ein Dreieck mit den Ecken bei $B = (0, 0)$, $C = (2, 0)$ und $D = (0, 1)$.
- (c) $\iint_A (x^2 + y) \, dx \, dy$ wo A ist eine Fläche eingegrenzt von Parabolas $y = x^2$ und $x = y^2$.
- (d) $\iint_A \frac{x^2}{y^2} \, dx \, dy$ wo A ist eine Fläche eingegrenzt von $y = 1/x$, $y = 4x$ und $x = 3$.

Aufgabe 6: Dreidimensionale Integrale

Berechnen Sie folgende dreifache Integrale

- (a) $\iiint_A 2e^{3x+2y+z} \, dx \, dy \, dz$ wo $A = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$.
- (b) $\iiint_A \frac{1}{(x+y+z+1)^3} \, dx \, dy \, dz$ wo A ist ein Volumen eingegrenzt von den Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und $x + y + z = 1$.
- (c) $\iiint_A (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$ wo A ist ein Volumen eingegrenzt von $z \geq 0$ und $4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$.
- (d) $\iiint_A xyz \, dx \, dy \, dz$ wo A ist ein Volumen eingegrenzt von $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Aufgabe 7: Masse, Schwerpunkt und Trägheitsmoment

- (a) Berechnen Sie die Masse eines Kegels der Höhe a und mit Radius R wo die Dichte hängt nur von der Höhe $\rho = kz$ ab.
- (b) Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunkts einer Fläche eingegrenzt durch eine Parabel $y^2 = 2px$ und eine Gerade $x = a$ ($a > 0$).
- (c) Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunkts eines Würfels $W = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ mit der Dichte $\rho(x, y, z) = x^2y^4z^6$.
- (d) Berechnen Sie den Trägheitsmoment einer homogenen Fläche eingegrenzt durch $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $x = 2y$, $2x = y$ ($x > 0, y > 0$) für die Achsen die mit den Koordinatenachsen übereinstimmen.
- (e) Berechnen Sie den Trägheitsmoment eines homogenen Würfels (Seite a) für eine Achse die Durch eine Seite durchgeht.