Aufgabe 14 (mündlich): Eigenschaften des Diracschen Spinoperators (8 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass der Diracsche Spinoperator $\vec{S}$ mit den Komponenten

$$S_i = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} \quad \text{und den Paulischen Spinmatrizen } \sigma_i$$

die Eigenschaften eines Drehimpulses besitzt, d.h. dass

$$[S_i, S_j] = i\hbar \sum_k \varepsilon_{ijk} S_k$$

ist.

b) Berechnen Sie folgende Kommutatoren mit dem Dirac-Hamiltonoperator

$$H_\mathrm{D} = c\,\alpha^k p_k + \beta\, m_0 c^2 \ .$$

(i) $[\vec{S}, H_\mathrm{D}]$

(ii) $[\vec{L}, H_\mathrm{D}]$, mit dem Drehimpulsoperator $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ und dem Orts- und Impulsoperator $\vec{r}$ und $\vec{p}$

(iii) $[\vec{S} + \vec{L}, H_\mathrm{D}]$

(iv) $[\vec{S} \cdot \vec{p}, H_\mathrm{D}]$

c) Beweisen Sie die Relation

$$\left(\vec{\sigma} \cdot \vec{a}\right)\left(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}\right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)\underline{1} + i\vec{\sigma} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \ ,$$

die bereits in Kapitel 7.2 angegeben wurde.

Hinweis: Die Paulischen Spinmatrizen haben folgende Eigenschaften:

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \underline{1} \ , \quad [\sigma_i, \sigma_j] = 2i \sum_k \varepsilon_{ijk} \sigma_k \ , \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}\underline{1} \ ,$$

$$\sigma_x \sigma_y \sigma_z = i\,\underline{1} \ , \quad \mathrm{Sp}(\sigma_i) = 0 \ , \quad \det(\sigma_i) = -1 \ .$$

Aufgabe 15 (schriftlich): Endliche Ausdehnung des Atomkerns (8 Punkte)

Das elektrostatische Potential eines Atomkerns kann durch das Potential einer homogen geladenen Kugel angenähert werden. Dann bewegt sich ein Elektron in einem wasserstoffartigen Atom im Potential

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{3Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(1 - \frac{r^2}{3R^2}\right) & \text{für} \quad r \le R \\ -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} & \text{für} \quad r > R \end{cases}$$

Die Abweichung vom Coulombpotential ist eine kleine Störung H_1 des ungestörten Wasserstoffproblems H_0.

a) Skizzieren Sie das Potential.

b) Berechnen Sie die Energiewerte in 1. Ordnung Störungstheorie. Geben Sie speziell die Energieverschiebung der $1s$-Zustände für die Isotope $A = 203$ und $A = 205$ von Thallium ($Z = 81$) an.
Hinweise: Die Kernradien $R \approx A^{1/3} r_0$ mit $r_0 = 1.2\,fm$ sind viel kleiner als der Bohrsche Radius a_B/Z mit $a_\mathrm{B} = 0.53\,Å$. Daher können in den auftretenden Integralen die Wellenfunktionen näherungsweise durch ihren Wert an der Stelle $r = 0$ approximiert werden. Es gilt

$$\psi_{nlm}(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{n a_\mathrm{B}}\right)^{3/2} \delta_{l0}\delta_{m0} \ .$$