Aufgabe 6 (schriftlich): Ritzsches Variationsverfahren (5 Punkte)
Die Grundzustandsenergie E_0 erfüllt für beliebige Zustände $|\psi\rangle$ die Ungleichung

$$E_0 \leq \frac{\langle\psi| H |\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} \ .$$

Mit Hilfe dieser Ungleichung soll die Grundzustandsenergie des Wasserstoffatoms, d.h. eines Elektrons im Potential

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \ ,$$

abgeschätzt werden.

a) Berechnen Sie eine Abschätzung $E_0^{(a)}$ unter Verwendung der Testfunktion

$$\psi(\vec{r}) = e^{-\alpha^2 r^2} \ .$$

Berechnen Sie hierzu die Energie $E(\alpha)$ in diesem Zustand und bestimmen Sie $E_0^{(a)}$ als Minimum von $E(\alpha)$.

b) Führen Sie dieselbe Rechnung wie in Teilaufgabe **a)** mit der Testfunktion

$$\psi(\vec{r}) = e^{-\beta r}$$

durch und bestimmen Sie damit die Abschätzung $E_0^{(b)}$. Welche Testfunktion liefert die bessere Abschätzung? Vergleichen Sie mit der exakten Grundzustandenergie.

Aufgabe 7 (mündlich): Anharmonischer Oszillator (10 Punkte)
Ein harmonischer Oszillator werde durch ein schwaches Zusatzpotential vierter Ordnung gestört, d.h. es gilt

$$H = H_0 + H_1$$

mit

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad \text{und} \quad H_1 = \alpha x^4$$

a) Berechnen Sie die Matrixelemente von x^4 in der Basis der Eigenzustände des harmonischen Oszillators.
Hinweis: Aus der Vorlesung können die folgenden Formeln benutzt werden:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a + a^\dagger\right), \qquad a\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \ , \quad a^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \ ,$$

$$\textit{sowie} \qquad x_{nn'} = \langle n| x |n'\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n'}\,\delta_{n,n'-1} + \sqrt{n'+1}\,\delta_{n,n'+1}\right) \ .$$

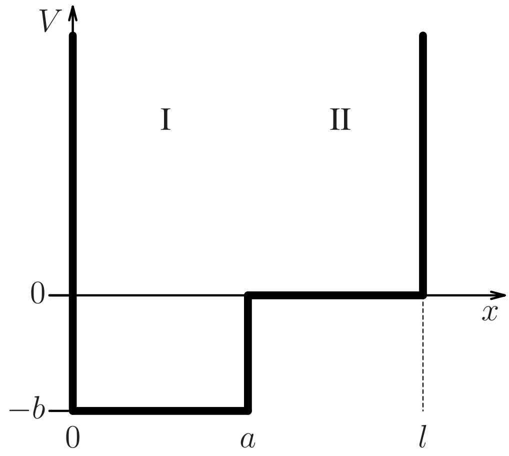
b) Berechnen Sie die Energiekorrektur $E_n^{(1)}$ des Zustandes $|n\rangle$ in erster Ordnung Störungstheorie.

c) Wiederholen Sie die Prozedur in zweiter Ordnung. Beschränken Sie sich dabei auf den Fall $n \geq 4$.

Aufgabe 8 (schriftlich): Potentialtopf mit kleiner Stufe (5 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m befinde sich in einem eindimensionalen Potential der Form:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für} \quad x \leq 0 \\ -b & \text{für} \quad 0 < x < a \\ 0 & \text{für} \quad a \leq x < l \\ \infty & \text{für} \quad x \geq l \end{cases}$$



Dabei ist der Potentialtopf in einem Bereich $0 < x < a$ um die Energie b abgesenkt. Die Energien und Wellenfunktionen des ungestörten Systems lauten

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2 \quad \text{und} \quad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(n \frac{\pi x}{l}\right) \ .$$

a) Betrachten Sie diese Absenkung des Potentials als kleine Störung und berechnen Sie die Grundzustandsenergie in erster Ordnung Störungstheorie. Was ergibt sich in den Grenzfällen $a = 0$, $a = l/2$ and $a = l$?

b) Berechnen Sie die Wellenfunktion in erster Ordnung Störungstheorie für den Fall $a = l/2$.

c) In der Klausur zur Atom- und Quantenphysik wurde die exakte Form der Wellenfunktion für dieses Potential hergeleitet. Für den Spezialfall $m = \hbar = b = l = 1$ ergibt sich in den beiden Bereichen

$$\begin{aligned} \psi_{\mathrm{I}}(x) &= 1.418 \, \sin[3.292 \, x] \\ \psi_{\mathrm{II}}(x) &= 1.419 \, \sin[2.974 \, (1 - x)] \ . \end{aligned}$$

Diskutieren Sie Ihr Ergebnis, indem Sie die Summe bis zum sechsten Glied auswerten und zusammen mit der exakten Lösung plotten. Wie viele Glieder der Summe müssen berücksichtigt werden um ein zufriedenstellendes Ergebnis zu erzielen?