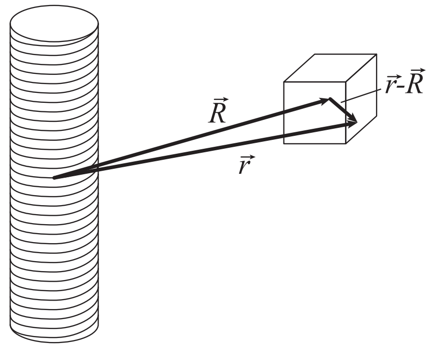
Aufgabe 30 (schriftlich): Aharonov-Bohm-Effekt (10 Punkte)

Eine Teilchen der Ladung q und Masse m_0 sei durch ein Potential in einem Raumbereich um den Punkt $\vec{R}$ eingeschlossen. Sie können sich vorstellen, dass sich das Teilchen in einer kleinen Kiste befindet. Der Punkt $\vec{R}$ liege außerhalb einer langen Spule.



Obwohl das Magnetfeld der Spule nur innerhalb der Spule von Null verschieden ist, existiert im Außenraum ein Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$.
Die Schrödingergleichung lautet also

$$\left[\frac{1}{2m_0}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\vec{A}(\vec{r})\right)^2 + V\left(\vec{r}-\vec{R}\right)\right]\psi_n\left(\vec{r},\vec{R}\right) = E_n\psi_n\left(\vec{r},\vec{R}\right)$$

a) Zeigen Sie, dass durch eine Eichtransformation

$$\psi_n' = e^{i\chi\left(\vec{r},\vec{R}\right)}\psi_n$$

die Schrödingergleichung in die Form

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2 + V\left(\vec{r}-\vec{R}\right)\right)\psi_n'\left(\vec{r}-\vec{R}\right) = E_n\psi_n'(\vec{r}-\vec{R})$$

übergeht. Wie muss dazu $\chi\left(\vec{r},\vec{R}\right)$ gewählt werden?
Hinweis: Eichtransformationen finden sich im Skript in Kapitel 6.4. Wählen Sie den Referenzpunkt der Phase χ in der Mitte der Kiste, also bei $\vec{R}$.

b) Berechnen Sie die Berry-Phase

$$\Phi_n = i\oint \langle\psi_n|\nabla_R\psi_n\rangle\cdot \mathrm{d}\vec{R}$$

für den Fall, dass die Kiste einmal um die Spule bewegt wird.
Hinweis: Überlegen Sie sich was sich für den Impulserwartungswert des Teilchens in der Kiste ergibt.

Aufgabe 31 (mündlich): Streuung in erster Bornscher Näherung (10 Punkte)

a) In der Vorlesung wurde für das Yukawa-Potential

$$V(r) = \frac{\alpha}{r}e^{-\beta r}$$

der differentielle Wirkungsquerschnitt

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{4\alpha^2 m_0^2}{\hbar^4}\frac{1}{(\beta^2+q^2)^2}\ , \qquad \text{mit:}\quad q^2 = 2k^2[1-\cos(\vartheta)] = 4k^2\sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$$

berechnet. Bestimmen Sie den totalen Wirkungsquerschnitt σ.
Was ergibt sich für das Coulomb-Potential?
Hinweis: Eine Integration über q statt über ϑ erleichtert die Rechnung.

b) Berechnen Sie für das Potential einer sphärischen Potentialbarriere

$$V(r) = \begin{cases} V_0 & \text{für} \quad r < r_0 \\ 0 & \text{für} \quad r > r_0 \end{cases}$$

in erster Bornscher Näherung den differentiellen Wirkungsquerschnitt $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$ und den totalen Wirkungsquerschnitt σ.
Was ergibt sich für die Streuung an einem Potentialtopf ($V_0 \to -V_0$)?
Hinweis:

$$\int_0^a \frac{[x\cos(x)-\sin(x)]^2}{x^5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left[1-\frac{1}{a^2}+\frac{\sin(2a)}{a^3}-\frac{\sin^2(a)}{a^4}\right]$$