Aufgabe 25 (mündlich): Kurzzeitig getriebener harmonischer Oszillator (10 Punkte)
Ein Teilchen mit der Masse m_0 und der Ladung q befinde sich im eindimensionalen Potential eines harmonischen Oszillators mit der Kreisfrequenz ω. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich der Oszillator im Grundzustand $|0\rangle$. Ein elektrisches Feld werde für einen Zeitraum τ hinzugeschaltet, so dass die Störung die Form

$$H_1(t) = \begin{cases} -qEx & \text{für } \; 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit E als elektrischer Feldstärke hat.

a) Berechnen Sie die Koeffizienten $b_1(\tau)$ und $b_2(\tau)$ am Ende der Störung für die Übergänge vom Grundzustand in den ersten bzw. zweiten angeregten Zustand in **erster** Ordung zeitabhängiger Störungstheorie.

b) Berechnen Sie nun die Koeffizienten $b_1(\tau)$ und $b_2(\tau)$ in **zweiter** Ordung zeitabhängiger Störungstheorie.

c) Bis zu welcher Ordnung müssten Sie in der Störungstheorie gehen, um einen endlichen Übergangskoeffizienten in den Zustand $|n\rangle$ zu erhalten?

d) In Aufgabe 5 wurde gezeigt, dass der Grundzustand durch eine Störung dieser Form (Verschiebungsanregung/displacive excitation) zur Anregung eines kohärenten Zustands $|\alpha(\tau)\rangle$ mit

$$\alpha(t) = \frac{iq}{\sqrt{2m_0\omega\hbar}} \int_0^t E(t') e^{i\omega(t'-t)} \, \mathrm{d}t'$$

führt.
Vergleichen Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten, die sich aus **a)** und **b)** ergeben, mit den Wahrscheinlichkeiten den kohärenten Zustand im Zustand $|1\rangle$ oder $|2\rangle$ zu messen.
Hinweis: Die Entwicklung in die Eigenzustände lautet

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \; .$$

Aufgabe 26 (schriftlich): Photoeffekt (12 Punkte)

Beim Photoeffekt wird ein Elektron aus einer Metalloberfläche durch Licht herausgelöst. Wir betrachten hier den Photoeffekt, bei dem das Elektron im Grundzustand eines wasserstoffähnlichen Atoms mit Kernladungszahl Z ein Photon absolviert und dadurch in einen Kontinuumszustand übergeht. Das Photon mit der Frequenz ω_γ kann durch die linear polarisierte elektromagnetische Welle

$$\vec{A}(\vec{r},t) = A_0 \exp\left[i\left(\vec{k}_\gamma \cdot \vec{r} - \omega_\gamma t\right)\right]\vec{\mathrm{e}} \qquad \text{mit} \qquad A_0 = \sqrt{\frac{2\hbar}{\varepsilon_0 \omega_\gamma V}}\ , \quad \vec{e}\cdot\vec{k}_\gamma = 0\ , \quad \left|\vec{k}_\gamma\right| = \frac{\omega_\gamma}{c}$$

beschrieben werden. Dabei ist $\vec{\mathrm{e}}$ ein Polarisations-Einheitsvektor. Diese Welle hat im betrachteten Volumen V die Energie $\hbar\omega_\gamma$ und entspricht daher gerade einem Photon. Der Wechselwirkungs-Hamiltonoperator lautet gemäß Kapitel 6.1

$$H_1 = -i\frac{e\hbar}{m_0}\vec{A}\cdot\nabla\ .$$

a) Berechnen Sie mit Hilfe von Fermis Goldener Regel für eine periodische Störung die Übergangsrate w_{fi} für den Übergang aus dem $1s$-Grundzustand in einen Kontinuumszustand, der durch eine ebene Welle mit Wellenvektor $\vec{k}$ beschrieben wird.

Hinweis: Die $1s$-Wellenfunktion und die Wellenfunktion des freien Teilchens lauten

$$\psi_{1s}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_\mathrm{B}}\right)^{\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{Z\,r}{a_\mathrm{B}}\right) \quad , \quad \psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\exp\left(i\vec{k}\cdot\vec{r}\right)\ ,$$

mit dem Bohrradius a_B.

b) Bestimmen Sie daraus die Übergangsrate pro Raumwinkelelement Γ_{fi} sowie den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\Gamma_{fi}}{j_\gamma}$$

mit der Photonstromdichte $j_\gamma = c/V$.

Hinweis: Gehen Sie bei der Berechung der Zustandsdichte analog zur Vorlesung Kap. 17.2.2 vor.

c) Wir betrachten nun speziell den Fall, dass die Photonenergie viel größer als die Bindungsenergie ist, d.h. $\hbar\omega_\gamma \gg |E_{1s}|$. Dann gilt auch noch $k \gg k_\gamma$ und $k \gg Z/a_\mathrm{B}$ (Beweis hier nicht verlangt). Wie lautet der differentielle Wirkungsquerschnitt unter dieser Annahme? Berechnen Sie damit den totalen Wirkungsquerschnitt

$$\sigma = \int \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\,\mathrm{d}\Omega\ .$$