Aufgabe 18 (mündlich): Potential aus Ladungsdichte und Polarisation (8 Punkte)

In einem Dielektrikum seien die makroskopische Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ und die Polarisation $\vec{P}(\vec{r})$ gegeben. Beide Größen seien zeitunabhängig und sollen im Unendlichen verschwinden.

a) Begründen Sie, dass das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ auch im Fall der Elektrostatik in Materie aus einem skalaren Potential abgeleitet werden kann gemäß $\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad}\,\phi(\vec{r})$.

b) Zeigen Sie, dass bei gegebener Ladungsdichte und Polarisation das elektrostatische Potential

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\frac{\vec{P}(\vec{r}\,')\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \tag{1}$$

die makroskopische Maxwellgleichung $\text{div}\,\vec{D} = \rho$ löst.

c) Bestimmen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ einer ungeladenen, homogen polarisierten Kugel mit Radius *R*. Die Polarisation zeige in *z*-Richtung und lautet damit

$$\vec{P}(\vec{r}) = \begin{cases} P_0\,\vec{e}_z & \text{für} \quad r \le R \\ 0 & \text{für} \quad r > R \end{cases} .$$

Verwenden Sie zur Berechnung Gl. (1). Skizzieren Sie den Feldverlauf.

Aufgabe 19 (mündlich): Dipoleinstellung im elektrischen Feld (8 Punkte)

Ein permanenter elektrischer Dipol $\vec{p}$ hat im elektrischen Feld $\vec{E} = E\,\vec{e}_z$ die potentielle Energie $W(\vartheta) = -\vec{p}\cdot\vec{E} = -p\,E\cos\vartheta$. Die Wahrscheinlichkeit, dass im thermischen Gleichgewicht bei einer Temperatur *T* ein bestimmter Einstellungswinkel ϑ vorliegt, ist durch die Boltzmann-Verteilung $f(\vartheta)$ gegeben (vgl. Physik II, Kap. 2.5). Es gilt damit

$$f(\vartheta) = f_0 e^{-\frac{W(\vartheta)}{k_B T}}$$

mit der Boltzmann-Konstante k_B.

a) Bestimmen Sie f_0 aus der Normierungsbedingung

$$\int_0^\pi f(\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta = 1 .$$

b) Berechnen Sie das mittlere Dipolmoment

$$\langle p_z \rangle = \int_0^\pi p_z\,f(\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta .$$

Begründen Sie, warum die Mittelwerte der anderen beiden Komponenten verschwinden. Skizzieren Sie den Verlauf von $\langle p_z \rangle$ als Funktion der Größe $x = pE/(k_B T)$. Diskutieren Sie das Verhalten für hohe und für tiefe Temperaturen.

Hinweis: Für kleine x gilt die Entwicklung

$$\coth x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \ldots .$$

c) Befinden sich N dieser Dipole in einem Volumen V, so ist die makroskopische Polarisation gegeben durch

$$\vec{P} = n\langle \vec{p} \rangle \quad \text{mit} \qquad n = \frac{N}{V}.$$

Für kleine Felder kann P in Potenzen von E entwickelt werden. In erster Ordnung gilt dann

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}.$$

Bestimmen Sie die dielektrische Suszeptibilität χ_e als Funktion der Temperatur.

Aufgabe 20 (schriftlich): Leitfähigkeit eines Plasmas im Magnetfeld (10 Punkte)

Als Modell eines Plasmas betrachten wir ein System freier nicht-wechselwirkender Teilchen der Masse *m* und Ladung *q*, die den Raum mit homogener Teilchendichte *n* ausfüllen sollen. Ferner stehe dieses System über die Lorentzkraft in Wechselwirkung mit einem homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ $(B_0 = \text{const.})$. Dieses System werde durch ein zirkulares elektrisches Feld

$$\vec{E} = E_0(\omega) \begin{pmatrix} e^{i\omega t} \\ e^{i\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

angeregt. Zunächst werde die Reibung vernachlässigt.

a) Leiten Sie aus der Bewegungsgleichung für ein einzelnes Teilchen analog zur Vorlesung eine Bewegungsgleichung für die Stromdichte $\vec{j}$ her.

b) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung durch einen Ansatz der Form

$$\vec{j}(t) = j_0(\omega) \begin{pmatrix} e^{i\omega t} \\ e^{i\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

gelöst werden kann. Stellen Sie einen Zusammenhang der Form

$$j_0(\omega) = \sigma(\omega) E_0(\omega)$$

her und bestimmen Sie die Leitfähigkeit $\sigma(\omega)$. Bei welcher Frequenz ergibt sich eine Resonanz?

c) Wie lautet die Leitfähigkeit, falls auf die Teilchen zusätzlich eine Stokessche Reibungskraft $\vec{F} = -\gamma \vec{v}$ wirkt? Skizzieren Sie den Verlauf von $\text{Re}[\sigma(\omega)]$ und $\text{Im}[\sigma(\omega)]$. Nehmen Sie dazu an, dass es sich bei den geladenen Teilchen um Elektronen mit $q = -e < 0$ handelt.