Aufgabe 12 (mündlich): Eigenschaften der Fouriertransformation (5 Punkte)

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Fouriertransformation:

a) Ist $\tilde{f}(\omega)$ die Fouriertransformierte der Funktion $f(t)$, dann ist die Fouriertransformierte der konjugiert komplexen Funktion $f^*(t)$ ist gegeben durch $\tilde{f}^*(-\omega)$.

b) Für reelle Funktionen $f(t)$ gilt $\tilde{f}(-\omega) = \tilde{f}^*(\omega)$.

c) Die Fouriertransformierte einer geraden (ungeraden) Funktion ist gerade (ungerade). Was können Sie aus b) und c) für reelle und gerade Funktionen bzw. für reelle und ungerade Funktionen schließen?

d) Es gilt das Parservalsche Theorem

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\omega)|^2 d\omega .$$

Aufgabe 13 (schriftlich): Fourierreihe (6 Punkte)

Die Fourierreihe einer periodischen Funktion $f(t) = f(t+T)$ lautet

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right)$$

mit $\omega = 2\pi / T$. Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten a_n und b_n für die im Intervall $0 \le t < T$ definierten und dann periodisch fortgesetzten Funktionen. Skizzieren Sie auch jeweils die Funktionen.

a) $f(t) = 1 - 2\dfrac{t}{T}$

b) $f(t) = \begin{cases} \sin(2\pi \frac{t}{T}) & \text{für} \quad 0 \le t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{für} \quad \frac{T}{2} \le t < T \end{cases}$

Aufgabe 14 (schriftlich): Fouriertransformation I (3 Punkte)

Drücken Sie die Fouriertransformierten von

a) $f(t - t_0)$

b) $f(bt)$ mit $b \in \mathbb{R}, b \neq 0$

c) $(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, f(t - t') g(t')$

durch die jeweiligen Fouriertransformierten von $f(t)$ und $g(t)$ aus.

Aufgabe 15 (schriftlich): Fouriertransformation II (10 Punkte)

Berechnen Sie die Fouriertransformierten $\tilde{f}(\omega)$ der folgenden Funktionen. Fertigen Sie auch eine Skizze für die Funktion und ihre Fouriertransformierte an.

a) $f(t) = \sin(\omega_0 t)$

b) $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad |t| \le T \\ 0 & \text{für} \quad |t| > T \end{cases}$

c) $f(t) = \begin{cases} \sin(\omega_0 t) & \text{für} \quad |t| \le T \\ 0 & \text{für} \quad |t| > T \quad \text{mit} \quad T = \dfrac{N\pi}{\omega_0}\ , N \in \mathbb{N} \end{cases}$

d) $f(t) = \exp\left(-\dfrac{t^2}{T^2}\right)$

e) $f(t) = \exp\left(-\dfrac{|t|}{T}\right)$