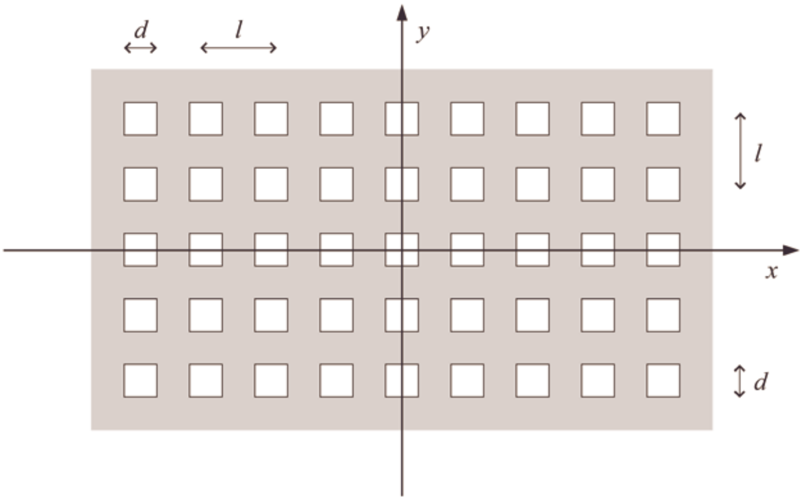
Aufgabe 34 (mündlich): Beugung am quadratischen Gitter (8 Punkte)

Die in einem Beugungsversuch gemessene Intensitätsverteilung ist in Fraunhofernäherung proportional zum Betragsquadrat der Fouriertransformierten $S\left(k,\alpha_L-\alpha,\beta_L-\beta\right)$ der Öffnungen in der Blende

$$S\left(k,\alpha_L-\alpha,\beta_L-\beta\right)=\int\limits_{\text{Öffnung}} e^{ik\left[(\alpha_L-\alpha)x'+(\beta_L-\beta)y'\right]}dx'\,dy'\,.$$

Betrachten Sie als Blende ein quadratisches Gitter mit $\left(2N+1\right)\times\left(2M+1\right)$ Quadraten der Kantenlänge d. Der Abstand der Quadrate sei ℓ. Die Öffnungen seien bei

$n\ell-d/2<x<n\ell+d/2$
$\left(n=-N,-N+1,\ldots,N-1,N\right)$
$m\ell-d/2<y<m\ell+d/2$,
$\left(m=-M,-M+1,\ldots,M-1,M\right)$



a) Berechnen Sie $S\left(k,\alpha_L-\alpha,\beta_L-\beta\right)$ für dieses Gitter und zeigen Sie, dass sich $S\left(k,\alpha_L-\alpha,\beta_L-\beta\right)$ schreiben lässt als ein Produkt aus der Fouriertransformierten S_e eines einzelnen Quadrats und einem Faktor S_{Gitter}, der nicht von der Größe d eines einzelnen Quadrats abhängt.

b) Berechnen Sie S_{Gitter} in geschlossener Form. Dazu ist es sinnvoll folgende Formel zu benutzen:

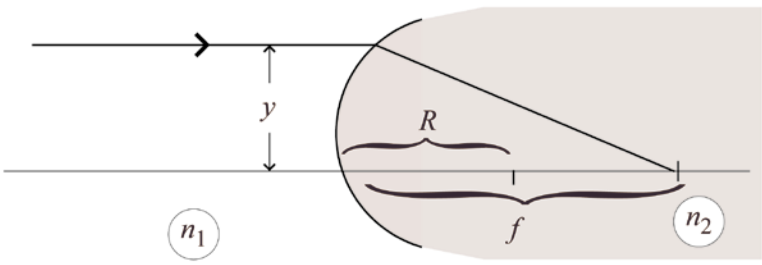
$$\sum_{j=0}^{N} x^j=\frac{1-x^{N+1}}{1-x}$$

c) Skizzieren Sie qualitativ den typischen Verlauf einer durch $\left|S_{Gitter}\right|^2$ bestimmten Intensitätsverteilung als Funktion von α für $\alpha_L=\beta_L=\beta=0$. Was bedeutet die Bedingung $\alpha_L=\beta_L=\beta=0$ physikalisch?

Aufgabe 35 (schriftlich): Brechung an gekrümmter Fläche (8 Punkte)

a) Bestimmen Sie für die Brechung der Lichtstrahlen an einer Kugeloberfläche zwischen zwei Medien mit den Brechungsindizes n_1 und n_2 die Brennweite in Abhängigkeit vom Abstand des einfallenden Strahls von der Hauptachse. Was gilt für achsennahe Strahlen?

b) Bei einem Glasstab ($n_{glas}=1{,}5$), der von Luft umgeben ist, sei die linke Grundfläche in Form einer konvexen Halbkugel mit dem Radius 2 cm ausgebildet. Wo erscheint das Bild einer Lichtquelle, die 6cm links vom Scheitelpunkt der Halbkugel entfernt ist? Wo erscheint das Bild einer Lichtquelle, wenn man die Anordnung in Wasser taucht?



Aufgabe 36 (schriftlich): Frauenhofer-Beugung an einer Kreisblende (8 Punkte)

Gesucht ist die Intensität auf einem Schirm hinter einer Kreisblende mit Radius R in Fraunhofer-Näherung. Die Lichtquelle soll sich dabei auf der Symmetrieachse befinden, d.h. mit der in der Vorlesung verwendeten Notation gilt $\alpha_L = \beta_L = 0$.

a) Zeigen Sie, dass sich die in der Vorlesung definierte Funktion $S(k,\alpha,\beta)$ mit $\alpha = x/r$ und $\beta = y/r$ hier reduziert auf eine Funktion $S(k,\delta)$ mit $\delta = \rho/r$ und $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$.

Hinweis: Verwenden Sie sowohl für $\vec{r}$ als auch für $\vec{r}\,'$ Zylinderkoordinaten.

b) Zeigen Sie, dass sich für die gesuchte Funktion ergibt

$$S(k,\delta) = 2\pi R^2 \frac{J_1(kR\delta)}{kR\delta}.$$

Dabei ist $J_n(x)$ die Besselfunktion 1. Art der Ordnung *n*, und es wurden die beiden Beziehungen

$$\int_0^{2\pi} e^{\pm ix\cos\varphi} d\varphi = 2\pi J_0(x)$$

$$\int_0^a x\, J_0(x) dx = a\, J_1(a)$$

verwendet (siehe z.B. I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik: Table of integrals, series and products).

Anmerkung: Die Besselfunktionen $J_n(x)$ sind Lösungen der so genannten Besselschen Differentialgleichung

$$\frac{d^2 J_n}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ_n}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) J_n = 0.$$

Sie treten in der Physik häufig bei zylindersymmetrischen Problemen auf.

c) Skizzieren Sie die Besselfunktionen $J_0(x)$ und $J_n(x)$ sowie die Intensitätsverteilung auf dem Schirm $\left|S(k,\delta)\right|^2$ z.B. unter Verwendung des Grafikprogramms gnuplot.

Hinweis: In gnuplot sind die Funktionen $J_0(x)$ und $J_1(x)$ definiert als `besj0(x)` und `besj1(x)`.

Aufgabe BONUS2 (schriftlich): Beugungsgitter (12 Punkte)

a) Senkrecht auf ein Glasgitter mit 200 Spalten, die über eine Breite von 1 cm verteilt sind, fällt monochromatisches, kohärentes Licht mit einer Wellenlänge von 500 nm. Die geritzten, undurchsichtigen Partien sind dabei doppelt so breit wie die dazwischen liegenden, durchsichtigen Glaspartien. Unter welchen Winkeln erscheinen die ersten sieben Maxima und welches sind ihre relativen Intensitätsverhältnisse?

b) Monochromatischen Licht trifft senkrecht auf ein Gitter dessen Spaltöffnungen so eingeritzt sind, dass das zentrale Strahlenbündel wie auch die anschließenden Maxima jeweils die gleiche Intensität (I_0) aufweisen. Das erste Hauptmaximum erscheint dabei gegenüber dem nullten unter einem Winkel $\alpha = 5\cdot 10^{-2}$. Wenn nun jede fünfte Spaltöffnung zugedeckt wird, welche neuen Lagen und Intensitäten ergeben sich für die Maxima, die bis zu einem Beugungswinkel von 0,1 beobachtet werden?