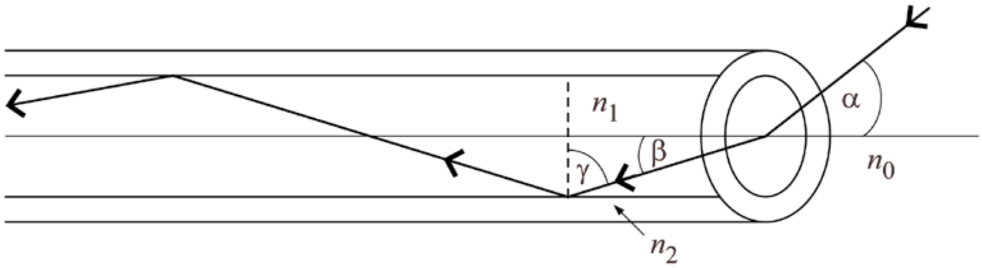
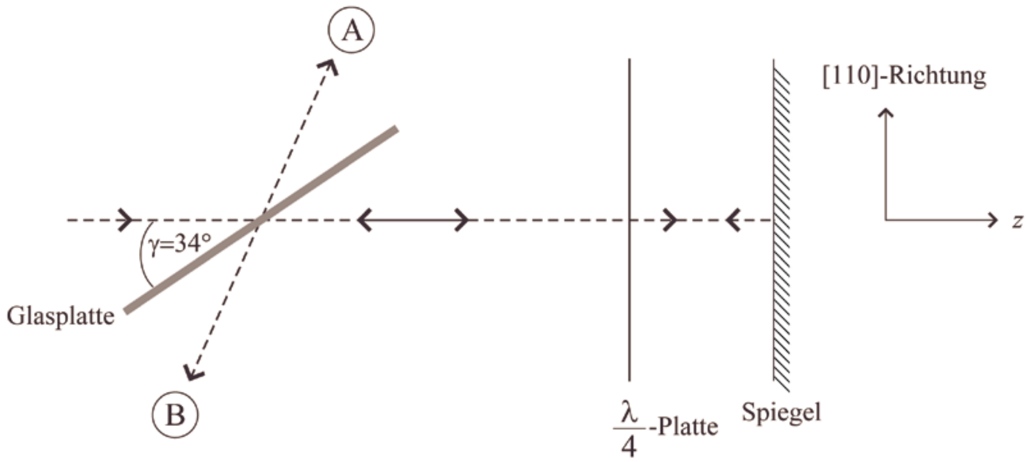
Aufgabe 31 (mündlich): Glasfaserkabel (4 Punkte)

Eine zylinderförmige Glasfaser mit Brechungsindex n_1 ist von einem optisch dünneren Material mit Brechungsindex $n_2 < n_1$ ummantelt. Die Glasfaser befinde sich in einem Medium dem Brechungsindex n_0. Licht, dessen Einfallswinkel α einen Maximalwert α_{max} nicht überschreitet, durchläuft unter mehrfacher Reflexion die gesamte Faser. Berechnen Sie α_{max} in Abhängigkeit von n_0, n_1, n_2.



Aufgabe 32 (mündlich): Reflexion und Polarisation (8 Punkte)

Auf die abgebildete Anordnung aus einer dünnen Glasplatte mit Brechungsindex $n = 1,482461$, einer $\lambda/4$ Platte mit der s*chnellen Richtung* entlang der x-Achse und einem ebenen Spielen falle eine Lichtwelle $\vec{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}(1,1,0)\cos(\omega t - kz)$ ein. Bestimmen Sie den Betrag der Feldamplituden in den reflektieren Strahlen bei A und B. Was erhält man, wenn die $\lambda/4$ Platte aus dem Strahlengang entfernt wird?



Die Zeichenebene (=Einfallsebene) wird durch die Vektoren $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$ und $(0,0,1)$ aufgespannt.

Aufgabe 33 (schriftlich): Übergangsmatrizen (12 Punkte)

Eine monochromatische ebene Weller der Frequenz ω falle senkrecht auf einen Stapel von Schichten unterschiedlicher Dicken d_j mit reellen (verlustfreien) Brechungsindizes n_j. Die Materialien seien unmagnetisch, d.h. es sei $\mu_j = 1$. Im Stapelinneren hat die Welle sowohl vorwärts wie rückwärts laufende Komponenten. Die Änderung der Welle beim Durchgang durch eine Trennfläche sowie von einer Seite einer Schicht zur anderen lässt sich mit Hilfe von 2×2-Matrizen beschreiben. Wenn man das elektrische Feld in der Schicht j in der Form

$$E(x) = E_+(x) + E_-(x) = E_+^{(j)} e^{ik_j x} + E_-^{(j)} e^{-ik_j x}$$

darstellt, nimmt die Matrizengleichung für den Übergang, nämlich $E' = \underline{T}E$, explizit die Form

$$\begin{pmatrix} E'_+ \\ E'_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_+ \\ E_- \end{pmatrix}$$

an.

a) Zeigen Sie, dass sich die Übergangsmatrix für den Durchgang durch eine Schicht mit dem Brechungsindex n_j und der Dicke d_j von einer Trennfläche zur anderen gegeben ist durch

$$\underline{T}_{\text{Schicht}}\left(n_j, d_j\right) = \begin{pmatrix} e^{ik_j d_j} & 0 \\ 0 & e^{-ik_j d_j} \end{pmatrix}$$

wobei $k_j = n_j \omega / c$ ist. Zeigen Sie ferner, dass das Inverse dieser Matrix gleich $\underline{T}^*$ ist.

b) Zeigen Sie, dass die Übergangsmatrix für den Durchgang durch eine Trennfläche vom Gebiet $n_1\left(x < x_0\right)$ zum Gebiet $n_2\left(x > x_0\right)$ die Gestalt

$$\underline{T}_{\text{Trennfl.}}\left(2,1\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+n & 1-n \\ 1-n & 1+n \end{pmatrix}$$

hat, wobei $n = n_1 / n_2$ ist.

c) Zeigen Sie, dass für den gesamten Stapel von Schichten die einfallende, reflektierte und hindurchgehende (transmittierte) Welle über die Relation

$$E_{\text{trans}} = \frac{\det\left(\underline{T}\right)}{t_{22}} E_{\text{ein}}, \quad E_{\text{refl}} = -\frac{t_{21}}{t_{22}} E_{\text{ein}}$$

miteinander verknüpft sind, wobei die Größen t_{ij} die Elemente einer Matrix $\underline{T}$ [mit Determinante $\det\left(\underline{T}\right)$] bezeichnen, die das Produkt aller „Vorwärts“-Übergangsmatrizen ist – einschließlich derer, die den Übergang aus dem umgebenden Medium in die erste Schicht und den Austritt aus der letzten Schicht zurück ins Medium beschreiben.

d) Wie lautet die gesamte Übergangsmatrix $\underline{T}$ für die Geometrie einer Antireflexschicht (vgl. Aufgabe 31), bei der sich eine Schicht der Dicke $2d$ mir Brechungsindex n_2 sich zwischen Luft $\left(n = 1\right)$ und einem Material mit Brechungsindex n_1 befindet?

Aufgabe BONUS1 (schriftlich): Polarisationsfilter (10 Punkte)

a) Ein zirkular polarisierter Lichtstrahl der Intensität I_0 wird durch einen (linearen) Polarisator P_A geschickt. Danach passiert er einen zweiten Polarisator P_B, der um 90° zu P_A verdreht ist. Wie groß sind die Intensitäten I_A bzw. I_B des Strahls nach P_A bzw. P_B?

b) Ein dritter Polarisator P_M, der um den Winkel ϕ gegenüber P_A gedreht ist, wird zwischen P_A und P_B gestellt. Wie lautet $I_B(\phi)$? Was ergibt sich für $\phi = 45°$?

c) Im Folgenden soll P_A so mit linear polarisiertem Licht bestrahlt werden, dass P_A 100% transmittiert. Wie lautet nun $I_B(\phi)$?

d) Der mittlere Polarisator P_M wird durch $N-1$ Polarisatoren ersetzt, die jeweils im Winkel $n\frac{\pi}{2N}$ $(n = 1, 2, ..N-1)$ zu P_A stehen. Was ergibt sich für die Intensität I_B?

e) Betrachten Sie den Grenzfall $N \to \infty$. Nähern Sie im Grenzfall die $\cos$-Funktion in dem Ausdruck von Teilaufgabe d). Welche Intensität I_B erhalten Sie? Wie ist die Polarisation des Lichts nach P_B?

!Bitte die TE Aufgaben separat abgeben!

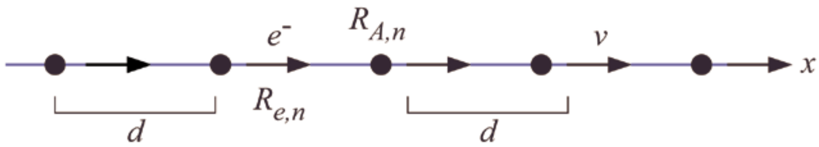
TE-Aufgabe TE21 (mündlich): Kraft zwischen zwei Teilchen (6 Punkte)

Zwei geladene Teilchen bewegen sich parallel im Abstand r zueinander mit der Geschwindigkeit v im Laborsystem. Legen Sie Ihr Koordinatensystem so, dass die Bewegung in x-Richtung ist und der Abstand r in y-Richtung gilt. Berechnen Sie die Kraft des einen Teilchens auf das andere im Ruhesystem der Teilchen und im Laborsystem.

TE-Aufgabe TE22 (schriftlich): Stromdurchflossener Draht (14 Punkte)

Ein stromdurchflossener Draht kann in einem einfachen Modell durch eine regelmäßige Anordnung von Atomrümpfen und Elektronen beschrieben werden. Die Atomrümpfe sind dabei im Abstand d angeordnet und ruhen. Die Elektronen haben ebenfalls den Abstand d und bewegen sich alle mit der selben Geschwindigkeit v in x-Richtung. Der (kontravariante) Vierervektor für den n-ten Atomrumpf bzw. das n-te Elektron lautet:

$$R_{A,n} = (ct, nd, 0, 0) \qquad \text{bzw.} \qquad R_{e,n} = (ct, nd + vt, 0, 0)$$



a) Wie lauten die Vierervektoren im Ruhesystem der Elektronen? Berechnen Sie die Abstände $d_A{}'$ und $d_e{}'$ für Atomrümpfe und Elektronen im Ruhesystem der Elektronen.

b) Berechnen Sie das elektrische und magnetische Feld der gesamten Elektronen im Ruhesystem der Elektronen. Transformieren Sie die Felder in das Ruhesystem der Atomrümpfe.

c) Berechnen Sie nun die Felder für den Grenzfall eines unendlich dünnen, unendlich langen Leiters mit dem Elektronenstrom I und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den bekannten Formeln. Zur Berechnung ist es sinnvoll die Summe über alle Elektronenpositionen in ein Integral überzugehen zu lassen ($nd \to x'$, $\sum_n \to \frac{N}{L}\int dx'$). Die Gesamtladung der Elektronen Ne geteilt durch die Länge des Drahts L entspricht der linearen Ladungsdichte λ. Die Ladungsstromdichte ist gegeben durch $\vec{j} = \lambda \vec{v}$.

Tipp: Folgendes Integral könnte nützlich sein: $\int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{1}{\left((x-x')^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{r^2}$

TE-Aufgabe BONUS (schriftlich): Maxwell-Gleichungen in Materie (14 Punkte)

In Materie kann man analog zum elektrischen Feldstärketensor einen Tensor für die dielektrische Verschiebung $\vec{D}$ und die magnetische Erregung $\vec{H}$ definieren:

$$\{H^{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} 0 & -cD_x & -cD_y & -cD_z \\ cD_x & 0 & -H_z & H_y \\ cD_y & H_z & 0 & -H_x \\ cD_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass sich aus $\partial_\mu H^{\mu\nu} = j^\nu$ die inhomogenen Maxwell-Gl.n in Materie ergeben.

b) Der *Polarisationstensor* ist definiert über $P^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} - \mu_0 H^{\mu\nu}$, wobei $F^{\mu\nu}$ der Feldstärketensor ist. Geben Sie die Elemente des Polarisationstensors an und drücken Sie diese durch die Polarisation $\vec{P}$ und die Magnetisierung $\vec{M}$ aus.

c) Wie transformiert sich $P^{\mu\nu}$? Geben Sie die Transformations-Gleichungen für die Komponenten von $\vec{P}$ und $\vec{M}$ explizit für den Fall an, dass sich Σ' in konstanter Geschwindigkeit v in x-Richtung bewegt.

d) Rechnen Sie die Polarisation $\vec{P}$ und die Magnetisierung $\vec{M}$ im Laborsystem für den Fall aus, dass im Ruhesystem Σ' der Materie diese nur in z' -Richtung magnetisiert ist, d.h. $\vec{P}' = (0,0,0)$ und $\vec{M}' = (0,0,M_z{}')$.