Aufgabe 23 (mündlich): Polaritonlösungen der Maxwellgleichungen (6 Punkte)

Im phänomenologischen Isolatormodell werden die gebundenen Ladungen durch harmonische Oszillatoren mit Resonanzfrequenz ω_0 und Dämpfung γ beschrieben. Breitet sich in diesem Medium eine elektromagnetische Welle aus, so kommt es zu einer Kopplung der elektromagnetischen und der mechanischen Schwingungen und zur Ausbildung neuer Eigenschwingungen. Diese werden in der Festkörperphysik Polaritonen genannt; sie spielen eine wichtige Rolle für die optischen Eigenschaften von Halbleitern und Isolatoren.

Das Verhalten des Materials sei charakterisiert durch die frequenzabhängige Suszeptibilität

$$\chi(\omega) = \frac{ne^2}{m\varepsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

eines Systems harmonischer Oszillatoren. Es kann ferner angenommen werden, dass es in dem Material keine freien Ladungsträger und keine Volumenströme gibt. Außerdem sei das Material unmagnetisch $(\mu_r = 1)$.

a) Machen Sie für das elektrische Feld $\vec{E}$ einen Ansatz einer ebenen monochromatischen Welle mit Wellenvektor $\vec{k} = k\vec{e}_z$ und Kreisfrequenz ω. Ferner sei $\vec{E}$ linear in x-Richtung polarisiert. Finden Sie aus der durch die oben genannte Suszeptibilität gegebenen Materialgleichung und der Maxwellgleichung $\operatorname{rot} \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$ die zu dem angesetzten elektrischen Feld gehörenden Felder $\vec{D}$ (dielektrische Verschiebung) und $\vec{B}$ (magnetisches Feld).

b) Zeigen Sie, dass alle Maxwellgleichungen durch die Ansätze aus Teil a) gelöst werden. Welche Beziehung besteht zwischen dem Betrag des Wellenvektors k und der Kreisfrequenz ω?

c) Betrachten Sie nun den dämpfungsfreien Fall $\gamma = 0$. Für welche Werte von ω existieren Lösungen vom obigen Typ mit reellem k-Vektor? Skizzieren Sie für diesen Fall die Dispersionsrelation $\omega(k)$. Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst den Verlauf von $k(\omega)$.

Aufgabe 24 (schriftlich): Elektromagnetische Welle, Poynting-Vektor, Strahlungsdruck (6 Punkte)

Eine transversale elektromagnetische Welle im Vakuum breite sich in z-Richtung aus. Berechnen Sie für die folgenden durch ihr Magnetfeld gegebenen Wellentypen

(i) linear polarisiert: $\vec{B}(\vec{r},t) = B_0\, \vec{e}_x \cos(kz - \omega t)$,

(ii) zirkular polarisiert: $\vec{B}(\vec{r},t) = B_0 \left[\vec{e}_x \sin(kz - \omega t) - \vec{e}_y \cos(kz - \omega t)\right]$,

a) das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r},t)$,

b) den Poynting-Vektor $\vec{S}(\vec{r},t)$ und den über eine Periode gemittelten Poynting-Vektor $\bar{\vec{S}}(\vec{r},t)$,

c) den Strahlungsdruck auf eine Ebene, deren Normalenvektor um den Winkel θ gegen die Ausbreitungsrichtung $(\vec{k} = k\vec{e}_z)$ geneigt ist, sowohl für eine total absorbierende als auch für eine total reflektierende Ebene. Hinweis: Der Strahlungsdruck entspricht dem Impulsübertrag pro Zeiteinheit auf die Fläche.

Aufgabe 25 (schriftlich): Wellen in anisotropen Medien (12 Punkte)

In anisotropen Materialien, z.B. in Kristallen mit niedriger Symmetrie zeigen im Allgemeinen die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ und die Polarisation $\vec{P}$ bzw. die dielektrische Verschiebung $\vec{D}$ nicht in dieselbe Richtung. Der Zusammenhang zwischen $\vec{E}$ und $\vec{D}$ wird dann durch den dielektrischen Tensor $\underline{\varepsilon}$ beschrieben. In einem optisch einachsigen Kristall ist eine Achse ausgezeichnet, während in der Ebene senkrecht dazu alle Richtungen gleichberechtigt sind. Betrachten Sie einen unendlich ausgedehnten optisch einachsigen Kristall. Die optische Achse liege in der *x* Richtung. Ein einfaches Modell zur Beschreibung der dielektrischen Eigenschaften eines solchen Materials ist gegeben durch die Materialgleichung:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \underline{\varepsilon} \vec{E} \,,$$

wobei $\underline{\varepsilon}$ folgende Matrix (dielektrischer Tensor) ist

$$\underline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}.$$

Ferner kann angenommen werden, dass es in dem Material keine Volumenströme oder freien Ladungsträger gibt und dass das Material unmagnetisch ist $(\mu = 1)$.

a) Machen Sie für die dielektrische Verschiebung den Ansatz

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} D_0 \, e^{i(k_x x + k_y y)} \, e^{-i\omega t}$$

Finden Sie aus obiger Materialgleichung und der Maxwellgleichung $\mathrm{rot}\vec{E} = -\dot{\vec{B}}$ die zu dem angesetzten Feld $\vec{D}$ gehörenden Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$.

b) Zeigen Sie, dass alle Maxwellgleichungen durch die Ansätze aus Teil a) erfüllt werden können. Welche Beziehungen müssen dazu zwischen den Komponenten k_x und k_y des Wellenvektors sowie zwischen der Kreisfrequenz ω und dem Betrag des Wellenvektors k bestehen?

c) Berechnen Sie den Poyntingvektor $\vec{S}$. Beachten Sie, dass bei dieser Rechnung die reellen Felder $\mathrm{Re}(\vec{E})$ und $\mathrm{Re}(\vec{H})$ zu benutzen sind. Was ergibt sich für den über eine Periode zeitgemittelten Poynting-Vektor $\bar{\vec{S}}$? Vergleichen Sie die Richtungen von $\vec{k}$ und $\bar{\vec{S}}$.

d) Welcher Bedingung müssen ε_1 und ε_2 genügen, damit das elektrische Feld $\vec{E}$ transversal ist?