8. Übung zur Physik I (WS 2013/14) **Prof. Kohl/Prof. Rohlfing**
Ausgabedatum: 02./03.12.2013 Abgabedatum: 09./10.12.2013

Aufgabe 51: Zentralfelder **(schriftlich, 2 Punkte)**

a) Betrachten Sie ein Zentralkraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\,\vec{e}_r$ mit $\vec{r} = (x, y, z)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\vec{e}_r = \vec{r}/r$. Zeigen Sie (in den kartesischen Koordinaten), dass $\operatorname{rot}\vec{F} = 0$ gilt (der Nachweis in einer der drei Komponenten genügt).

b) Die Kraft aus a) hänge mit einem Zentralpotential $V(\vec{r}) = V(r)$ zusammen: $\vec{F} = -\operatorname{grad} V$. Zeigen Sie (in den kartesischen Koordinaten), dass dafür $f(r) = -\frac{\partial}{\partial r} V(r)$ gelten muss.

c) In Kugelkoordinaten nimmt ein Kraftfeld die Form

$$\vec{F}(\vec{r}) = F_r(r, \vartheta, \varphi)\,\vec{e}_r + F_\vartheta(r, \vartheta, \varphi)\,\vec{e}_\vartheta + F_\vartheta(r, \vartheta, \varphi)\,\vec{e}_\varphi$$

an. Die Rotation ist dann durch

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\vec{F} &= \frac{1}{r\,\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\,F_\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi}F_\vartheta\right]\vec{e}_r \\ &+ \left[\frac{1}{r\,\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}F_r - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,F_\varphi)\right]\vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\,F_\vartheta) - \frac{\partial}{\partial\vartheta}F_r\right]\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass hiermit für das Zentralkraftfeld aus a) sofort $\operatorname{rot}\vec{F} = 0$ folgt.

d) In Kugelkoordinaten nimmt ein Potential die Form $V(\vec{r}) = V(r, \vartheta, \varphi)$ an. Der Gradient ist dann durch

$$\operatorname{grad} V = \frac{\partial V}{\partial r}\,\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\,\vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r\,\sin\vartheta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

gegeben. Zeigen Sie, dass hiermit für das Zentralpotential aus b) sofort $\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{\partial V}{\partial r}\,\vec{e}_r$ folgt.

Aufgabe 52: Spezielle Relativitätstheorie **(mündlich, 2 Punkte)**

Ein Raumschiff fliegt mit konstanter Geschwindigkeit $v = 0{,}8\ c$ knapp an der Erde und am Mond vorbei (Abstand zwischen Erde und Mond: 384.000 km).

a) Wie lange dauert die Reise zwischen Erde und Mond, gemessen von einem Beobachter auf der Erde?

b) Wie lange dauert die Reise, gemessen von einem der Fluggäste?

c) Wie weit sind Erde und Mond voneinander entfernt, gemessen von einem der Fluggäste?

Aufgabe 53: Geostationäre Umlaufbahn **(schriftlich, 3 Punkte)**

a) Welche Entfernung h von der Erdoberfläche muss ein künstlicher Satellit haben, der über einem bestimmten Punkt des Äquators stillzustehen scheint (geostationärer Umlauf)?
(Masse der Erde: $M \approx 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg; Gravitationskonstante: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \, \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\ s}^2}$)

b) Unter welchem Winkel α zur Horizontalen erscheint in Münster (52. Breitengrad) ein solcher Satellit, wenn er sich auf dem gleichen Längengrad befindet?

c) Warum kann man keinen Satellit geostationär über Münster fliegen lassen?

Aufgabe 54: Gravitationsgesetz **(mündlich, 1 Punkt)**

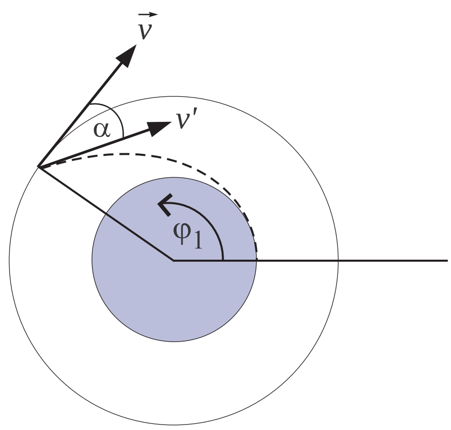
Welche Kraft übt eine Bleikugel mit einem Radius $r_1 = 10$ cm (Dichte $\rho = 11{,}4$ g/cm^3) auf eine zweite Bleikugel mit einem Radius $r_2 = 2$ cm aus, wenn der Abstand R der beiden Schwerpunkte 12,5 cm beträgt? Vergleichen Sie diesen Wert mit der auf die zweite Kugel wirkenden Schwerkraft!

Aufgabe 55: Kepler Problem **(mündlich, 5 Punkte)**

Die Bahnkurve eines Körpers mit der Masse m im Gravitationspotential einer Masse M ist durch $r(\varphi) = \dfrac{k}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_P)}$ gegeben. Stellen Sie für $\varphi_P = 0$ die obige Gleichung in kartesischen Koordinaten ($x = r \cos\varphi$, $y = r \sin\varphi$) dar. Diskutieren Sie die Fälle $\varepsilon = 0$, $\varepsilon < 1$, $\varepsilon = 1$ und $\varepsilon > 1$. Wie hängen für elliptische (+) Bahnen und hyperbolische (−) Bahnen $\dfrac{(x \pm e)^2}{a^2} \pm \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ die große und die kleine Halbachse von k, von ε und von den physikalischen Parametern Drehimpuls und Energie ab? Wie verhalten sich für $\varepsilon < 1$ die Geschwindigkeiten am Perihel v_P und am Aphel v_A zueinander?

Aufgabe 56: Bewegung im Gravitationsfeld **(schriftlich, 3 Punkte)**

Eine Raumkapsel bewege sich auf einer Kreisbahn mit Radius $R = 2\,R_E$ um die Erde. Durch Steuerungsdüsen wird bei $\varphi = \varphi_1$ ihre Flugrichtung um den Winkel α verändert. Die Energie bleibe dabei erhalten. Wie groß sind α und φ_1 zu wählen, damit die Kapsel bei $\varphi = 0$ die Erde berührt (keine Luftreibung)?



Hinweis: Berechnen Sie zunächst den Drehimpuls und die Energie der Kapsel auf der Umlaufbahn und überlegen Sie dann, wie ε und k für eine Bahn zur Erde zu wählen sind.

Aufgabe 57: **Planetensystem** **(schriftlich, 2 Punkte)**

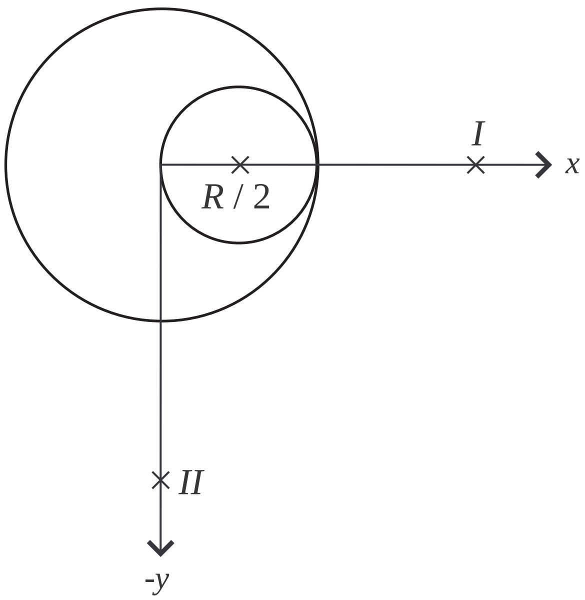
Zwei Planeten gleicher Masse bewegen sich um einen Stern. Planet 1 bewege sich auf einer Kreisbahn mit Radius $R_1 = 10^{11}$ m. Seine Umlaufzeit beträgt zwei Jahre. Planet 2 bewege sich auf einer elliptischen Bahn mit $\varepsilon = 1/2$, wobei sein kleinster Abstand zum Stern 10^{11} m beträgt. Die Planeten sollen sich gegenseitig nicht beeinflussen.

a) Wie groß ist die Masse des Sterns?

b) Wie groß ist die Umlaufzeit von Planet 2?

Aufgabe 58: **Gravitationskraft einer inhomogenen Massenverteilung** **(mündlich, 2 Punkte)**

Aus einer homogenen Kugel der Dichte ρ mit Radius R wird eine kleinere Kugel mit Radius $R/2$ so herausgeschnitten, dass die beiden Mittelpunkte um $R/2$ gegeneinander verschoben sind.



Ein Probekörper der Masse m wird durch den Raum bewegt. Berechnen Sie die auf ihn wirkende Kraft $\vec{F}$. Welche Größe und Richtung hat die Kraft $\vec{F}$ in den Punkten I und II im Abstand $2\,R$ vom Ursprung?