Aufgabe 20: Vektorielle Addition von Geschwindigkeiten (schriftlich, 2 Punkte)

Ein Sportflugzeug fliegt mit einer Reisegeschwindigkeit $v = 180\,\mathrm{km/h}$ von Münster nach München und zurück. Die einfache Entfernung beträgt $s = 540\,\mathrm{km}$. Wie groß ist die Flugzeit für einen Hin- und Rückflug:

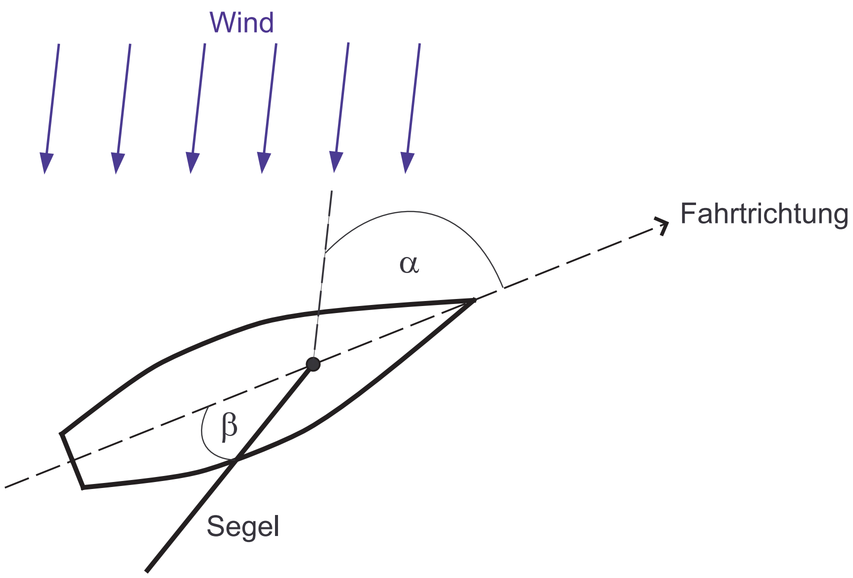
a) an einem windstillen Tag?

b) an einem Tag, an dem Südwind (Gegen- bzw. Rückenwind) mit 60 km/h weht?

b) an einem Tag mit Seitenwind von 60 km/h senkrecht zur Strecke Münster-München.

Aufgabe 21: Kräftezerlegung (mündlich, 2 Punkte)

Warum kann ein Segelboot auch unter einem Winkel $\alpha < 90°$ *gegen* den Wind fahren? Geben Sie die Bedingung an, der der Winkel β zwischen Segelfläche und Fahrtrichtung genügen muss. Bei welchem Winkel β ist die Antriebskraft maximal? (Auf das Segel soll nur die senkrechte Komponente der Windkraft wirken.)



Aufgabe 22: Impulserhaltung (schriftlich, 2 Punkte)

Sendet ein Atomkern beim Alphazerfall einen He-Kern aus, so erfährt er einen Rückstoß. Berechnen Sie die Geschwindigkeit in ms^{-1} und die Energie in eV (Elektronvolt) für einen Thorium-Kern, der durch Alphazerfall aus Uran entstanden ist. Wie groß ist die bei diesem Zerfall insgesamt freiwerdende Energie?

Masse des Thorium-Kerns:	$M = 234\,u$
Masse des Alphateilchens:	$m = 4\,u$
atomare Masseneinheit:	$1\,u = 1{,}66 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Geschwindigkeit des Alphateilchens:	$v = 1{,}4 \times 10^{7}\,\mathrm{ms}^{-1}$
$1\ \mathrm{eV} = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}$	

Aufgabe 23: Kreisbewegung **(mündlich, 1 Punkt)**

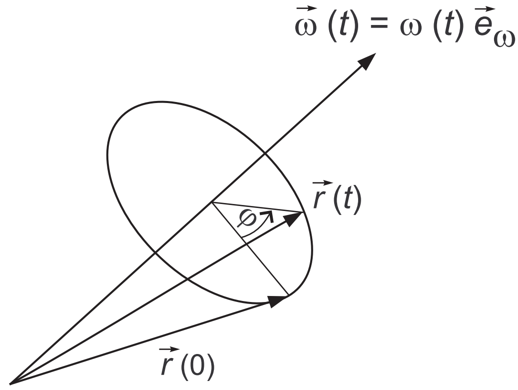
Wie groß ist die Geschwindigkeit eines Satelliten in einer erdnahen Umlaufbahn (Erdradius $r_E = 6.371\,\mathrm{km}$)? Welche Zeit benötigt er für eine Erdumrundung? Nehmen Sie an, dass die Fallbeschleunigung als Zentripetalbeschleunigung wirkt.

Aufgabe 24: Allgemeine Kreisbewegung **(mündlich, 3 Punkte)**

Die kreisförmige Bewegung eines Vektors $\vec{r}\,(t)$ um eine zeitlich konstante Achse mit der Richtung $\vec{e}_\omega$ lässt sich allgemein in folgender Form schreiben:

$$\vec{r}\,(t) \;=\; \vec{r}\,(0)\,\cos\varphi\,(t) \,+\, r_\parallel\,(1-\cos\varphi\,(t))\,\vec{e}_\omega \,+\, \vec{e}_\omega \times \vec{r}\,(0)\,\sin\varphi\,(t)\;.$$

Dabei ist $r_\parallel = \vec{r}\,(0)\cdot\vec{e}_\omega$. Der Mittelpunkt des Kreises liegt bei $\vec{r}_\parallel = r_\parallel\,\vec{e}_\omega$.



a) Überzeugen Sie sich davon, dass $\vec{r}\,(t)$ eine kreisförmige Bewegung beschreibt. Zeigen Sie dazu, dass der Vektor $\vec{R}\,(t) = \vec{r}\,(t) - r_\parallel\,\vec{e}_\omega$ immer senkrecht auf $\vec{e}_\omega$ steht und dass $|\vec{R}\,(t)|$ zeitlich konstant ist.

b) Zeigen Sie durch explizites Ausrechnen, dass sich die zeitliche Ableitung von $\vec{r}\,(t)$ als

$$\frac{d}{dt}\,\vec{r}\,(t) \;=\; \vec{\omega}\,(t) \times \vec{r}\,(t)$$

schreiben lässt. Dabei ist

$$\vec{\omega}\,(t) \;=\; \omega\,(t)\,\vec{e}_\omega \qquad \text{mit} \qquad \omega\,(t) \;=\; \frac{d\,\varphi\,(t)}{d\,t} \;=\; \dot{\varphi}\,(t)\;.$$

c) Geben Sie $\vec{r}\,(t)$ für

$$\vec{\omega}\,(t) \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega\,(t) \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{r}\,(0) \;=\; \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

an.

Aufgabe 25: **Polarkoordinaten** **(schriftlich, 4 Punkte)**

In der Vorlesung haben Sie die ebenen Polarkoordinaten

$$x = \rho \cos \varphi = r \cos \varphi \qquad \text{und} \qquad y = \rho \sin \varphi = r \sin \varphi$$

mit den Einheitsvektoren

$$\vec{e}_\rho = \vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

kennengelernt. (Die Notation bezüglich der radialen Komponente $\rho = r$ ist in der Literatur nicht einheitlich.)

a) Ein Punkt habe die kartesischen Koordinaten $x = -3\,R$ und $y = 2\,R$, wobei R eine Konstante ist. Geben Sie die zugehörigen Polarkoordinaten an.

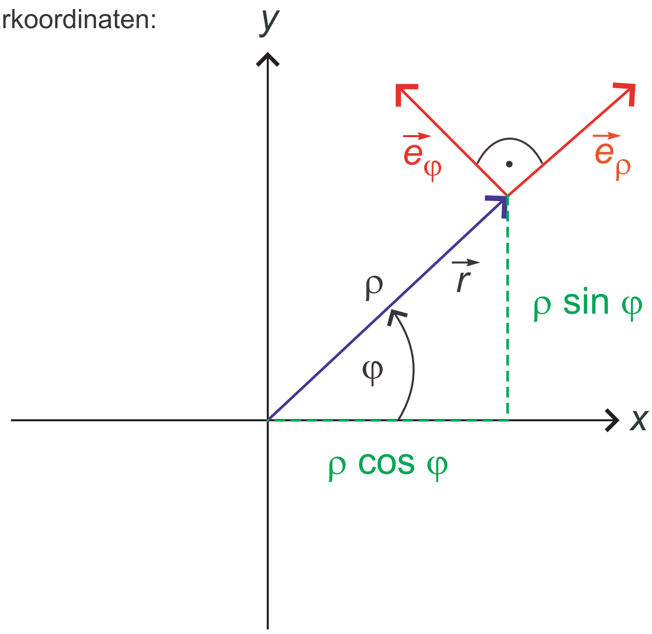
b) Bei der Beschreibung von Bewegungen mit $r = r\,(t)$ und $\varphi = \varphi\,(t)$ ist zu beachten, dass sich die Einheitsvektoren zeitlich ändern. Berechnen Sie $\frac{d}{d\,t}\,\vec{e}_r$ und $\frac{d}{d\,t}\,\vec{e}_\varphi$. Stellen Sie die resultierenden Vektoren mit Hilfe von $\vec{e}_r$ bzw. $\vec{e}_\varphi$ dar.

c) Verifizieren Sie, dass für $\vec{r} = r\,\vec{e}_r$ die Geschwindigkeit die Form $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$ hat. Berechnen Sie die Beschleunigung $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$ in Polarkoordinaten.

d) Ein Teilchen bewege sich auf einer Bahnkurve mit $r = v_0\,t$ und $\varphi = \omega\,t$, wobei v_0 und ω konstant sind. Berechnen Sie $\vec{v}$ und $\vec{a}$ in Polarkoordinaten und bestimmen Sie $|\vec{v}\,|$ und $|\vec{a}\,|$.

e) Stellen Sie $\vec{r}\,(t)$ für die Bewegung aus d) in kartesischen Koordinaten dar und berechnen Sie $\vec{v}$, $|\vec{v}\,|$, $\vec{a}$ und $|\vec{a}\,|$. Skizzieren Sie die Bahnkurve.

Polarkoordinaten:



Aufgabe 26: **Partielle Ableitungen** **(mündlich, 2 Punkte)**

Berechnen Sie für die folgenden Funktionen (mit $r = |\vec{r}\,| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ und $\frac{\partial}{\partial z}$:

a) $f(r) = \frac{1}{r}$

b) $f(r) = r^2$

c) $f(r) = \frac{1}{r} \cdot e^{-\alpha r}$

d) $f(x, y) = \ln(a x^2 + b y^2)$

e) $f(x, y, z) = \frac{y z}{\sqrt{c + x^2}}$

Dabei sind α, a, b und c Konstanten.

Aufgabe 27: **Potentiale** **(schriftlich, 2 Punkte)**

Berechnen Sie für die folgenden Potentiale $V(\vec{r}\,)$ die zugehörigen Kraftfelder $\vec{F}(\vec{r}\,)$.

a) $V(\vec{r}\,) = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} k y^2$

b) $V(\vec{r}\,) = A (x^2 + y^2 + \alpha z^2)^{-\frac{1}{2}}$

c) $V(\vec{r}\,) = \frac{B}{r^2}$

d) $V(\vec{r}\,) = \frac{c}{r} e^{-\frac{r}{r_0}}$

Dabei sind A, B, c, k, α und r_0 Konstanten. Welches Kraftfeld ergibt sich bei b) für $\alpha = 1$?

Aufgabe 28: **Kraftfelder** **(mündlich, 2 Punkte)**

Untersuchen Sie für die folgenden Kraftfelder, ob es ein dazugehöriges Potential gibt. Falls es eines gibt, berechnen Sie es.

a) $\vec{F}(\vec{r}\,) = A \frac{\vec{r}}{r^3}$

b) $\vec{F}(\vec{r}\,) = \frac{B}{r^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$

Dabei sind A und B Konstanten.