Aufgabe 15: Vektoridentitäten (mündlich, 4 Punkte)

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ im $\mathbb{R}^3$.

a) Beweisen Sie (am einfachsten komponentenweise, z. B. x-Komponente) die Graßmann-Identität

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\,\vec{c} \,.$$

b) Beweisen Sie (mit Hilfe der Graßmann-Identität) die Jacobi-Identität

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 \,.$$

c) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ heißt „Spatprodukt“ (= Volumen des von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Parallelpipeds). Beweisen Sie seine Invarianz unter zyklischer Vertauschung, d. h.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} \,.$$

d) Beweisen Sie (unter Verwendung von a) und c)) die Lagrange-Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})\,(\vec{b} \cdot \vec{c}) \,.$$

e) Was folgt aus der Lagrange-Identität für $\vec{c} = \vec{a}$ und $\vec{d} = \vec{b}$?

Aufgabe 16: Krümmung der Bahnkurve (mündlich, 3 Punkte)

Betrachten Sie erneut das Teilchen aus Aufgabe 11, welches sich auf der Bahnkurve

$$\vec{r}\,(t) = \begin{pmatrix} r_0 \cos(\omega\, t) \\ r_0 \sin(\omega\, t) \\ v_0\, t \end{pmatrix}$$

bewegt.

a) Geben Sie die Zeit als Funktion $t\,(s)$ der Bahnkurvenlänge s an, die das Teilchen von $t_1 = 0$ bis $t_2 = t$ zurückgelegt hat.

b) Geben Sie die Bahnkurve $\vec{r}\,(s)$ als Funktion von s an.

c) Berechnen Sie den Tangenteneinheitsvektor $\vec{e}_T$ (in der Vorlesung als $\vec{t}$ bezeichnet), den Normaleneinheitsvektor $\vec{n}$, die Krümmung κ und den Krümmungsradius R der Bahnkurve. Was ergibt sich für $v_0 = 0$?

d) Geben Sie die Bahnkurve in Zylinderkoordinaten an, d. h. $\rho\,(t)$, $\varphi\,(t)$ und $z\,(t)$.

Hinweis: Verwenden Sie die Abkürzung $b = \sqrt{r_0^2\,\omega^2 + v_0^2}$.

Aufgabe 17: **Beschleunigendes Auto** **(schriftlich, 3 Punkte)**

a) Ein Auto beschleunigt in 10 s von 0 auf 100 km/h. Wie groß ist die (konstante) Beschleunigung? Welche Wegstrecke legt der Wagen während des Beschleunigungsvorganges zurück?

b) Ein Auto, welches mit $a = -4\ \mathrm{m/s^2}$ bremsen kann, fährt bei Nebel (Sichtweise 30 m). Wie groß darf seine Geschwindigkeit höchstens sein, wenn die Reaktionszeit des Fahrers (Zeitspanne zwischen dem Erkennen eines Hindernisses und dem Einsetzen der Bremsung) 1 s beträgt?

Aufgabe 18: **Tour Montparnasse** **(mündlich, 4 Punkte)**

Für den Tour Montparnasse (http://www.tourmontparnasse56.com) in Paris wird mit folgenden Angaben geworben:

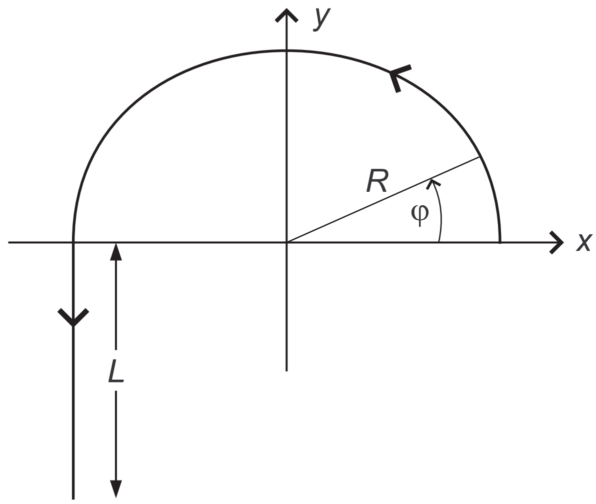
- Von der Panoramadachterrasse (210 m hoch) können Sie bei klarem Wetter 40 km weit sehen.
- In nur 38 Sekunden bringt Sie der schnellste Aufzug Europas in 196 Meter Höhe.

a) Wie weit kann man bei klarem Wetter sehen, wenn die Sicht nur durch die Erdkrümmung begrenzt wird (Erdradius $r_E = 6.370$ km)?

b) Wir nehmen an, dass der Aufzug während der ersten Hälfte der Fahrzeit konstant mit a_0 beschleunigt. Danach wird er mit $-a_0$ abgebremst. Welche Beschleunigung a_0 muss man dem Benutzer zumuten, um die versprochene Zeit von 38 Sekunden einhalten zu können? Vergleichen Sie diesen Wert mit der Erdbeschleunigung! Wie groß ist die größte Geschwindigkeit während der Auffahrt? Skizzieren Sie den Bewegungsverlauf im Beschleunigung-Zeit-, Geschwindigkeit-Zeit- und im Weg-Zeit-Diagramm.

Aufgabe 19: **Bewegung auf Halbkreis** **(schriftlich, 6 Punkte)**

a) Ein Eisenbahnzug befährt mit konstanter Geschwindigkeit $|\vec{v}\,| = v_0$ eine Strecke, die aus einem Halbkreis mit Radius R und einer Geraden der Länge L besteht. Der Zug befinde sich zur Zeit $t = 0$ bei $\vec{r} = (R,\, 0)$, zur Zeit t_1 bei $\vec{r} = (-R,\, 0)$ und zur Zeit t_2 bei $\vec{r} = (-R,\, -L)$.



1) Parametrisieren Sie die Bahnkurve, d. h. geben Sie $\vec{r}\,(t)$ für $0 \leq t \leq t_1$ und $t_1 \leq t \leq t_2$ an. Bestimmen Sie t_1 und t_2 für $v_0 = 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $R = 1\,\mathrm{km}$ und $L = 2\,\mathrm{km}$.

2) Berechnen Sie die Beschleunigung $\vec{a}\,(t)$.

b) Eine Masse zieht einen dünnen Faden, der durch ein halbkreisförmiges Rohr geführt wird, hinter sich her. Zur Zeit $t_0 = 0$ ruhe die Masse und der Endpunkt des Fadens befinde sich am Anfang des Rohres bei $\vec{r} = (R,\, 0)$. Dann fällt die Masse mit konstanter Beschleunigung g im Schwerefeld der Erde. Zur Zeit t_1 verlässt der Endpunkt des Fadens das Rohr. Bestimmen Sie die Bahnkurve $\vec{r}\,(t)$, die Geschwindigkeit $\vec{v}\,(t)$ und die Beschleunigung $\vec{a}\,(t)$ für $0 \leq t \leq t_1$. Berechnen Sie t_1 für $g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ und $R = 20\,\mathrm{cm}$.