2. Übung zur Physik I (WS 2013/14) — **Prof. Kohl/Prof. Rohlfing**

Ausgabedatum: 21./22.10.2013 — Abgabedatum: 28./29.10.2013

Aufgabe 8: Vektorprodukt (mündlich, 3 Punkte)

a) Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ und den Winkel, der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossen wird.

b) Die durch die Ortsvektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ beschriebenen Punkte definieren eine Ebene. Bestimmen Sie die z-Komponente des Ortsvektors $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ d_z \end{pmatrix}$ derart, dass dieser Punkt auch in der Ebene liegt. Berechnen Sie dazu den normierten Vektor $\vec{n}$, der auf der Ebene senkrecht steht, und bestimmen Sie die Skalarprodukte $\vec{a} \cdot \vec{n}$, $\vec{b} \cdot \vec{n}$ und $\vec{c} \cdot \vec{n}$.

Aufgabe 9: Zerlegung von Vektoren (schriftlich, 3 Punkte)

a) Häufig ist es bei Anwendungen günstig, einen Vektor $\vec{a}$ nach orthogonalen Einheitsvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ zu zerlegen, die *nicht* mit den kartesischen Einheitsvektoren $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ übereinstimmen. Betrachten Sie hier

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad \vec{e}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} .$$

Der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ lässt sich in folgender Form schreiben:

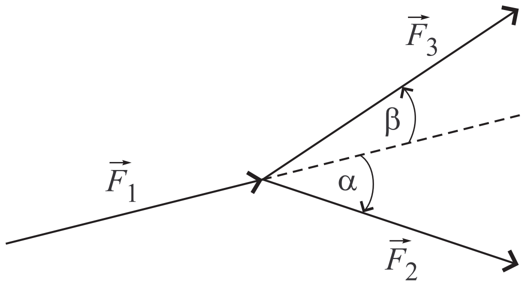
$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 .$$

Bestimmen Sie die Komponenten a_x, a_y, a_z, a_1, a_2 und a_3.

b) Zerlegen Sie den Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ in Anteile $\vec{b}_{\parallel}$ und $\vec{b}_{\perp}$, die parallel bzw. senkrecht zum Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind.

Aufgabe 10: **Anwendung der Vektorrechnung: Zusammensetzung von Kräften** **(mündlich, 4 Punkte)**

Eine Kraft $\vec{F}_1$ setzt sich aus zwei Teilkräften $\vec{F}_2$ und $\vec{F}_3$ zusammen, die mit $\vec{F}_1$ die Winkel α bzw. β bilden. Berechnen Sie $F_2 = |\vec{F}_2|$ und $F_3 = |\vec{F}_3|$ in Abhängigkeit von $F_1 = |\vec{F}_1|$.



Was gilt in folgenden Spezialfällen?

i) $\alpha = 0°, \beta \neq 0°$

ii) $\alpha = 90°, \beta \neq 0°$

iii) $\alpha \equiv \beta$

Hinweis: $\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta = \sin(\alpha + \beta)$.

Aufgabe 11: **Bahnkurve I: Helix** **(mündlich, 2 Punkte)**

Die Bahnkurve eines Teilchens sei durch

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\omega t) \\ R \cdot \sin(\omega t) \\ v_0 t \end{pmatrix}$$

gegeben. Dabei sind R, ω und v_0 Konstanten.

a) Skizzieren Sie die Bahnkurve für $0 \leq t \leq \frac{4\pi}{\omega}$.

b) Berechnen Sie

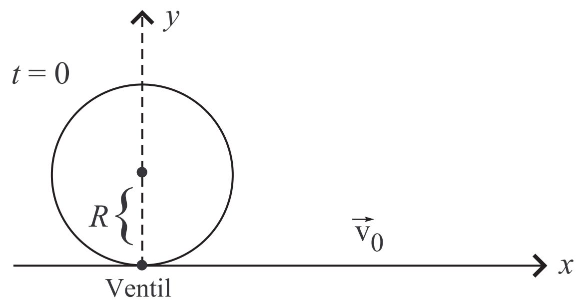
$$|\vec{r}(t)| , \quad \vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) , \qquad \vec{a}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}(t) \qquad \text{und} \qquad |\vec{a}(t)| .$$

c) Berechnen Sie die Länge des Weges, den das Teilchen von $t_1 = 0$ bis $t_2 = \frac{4\pi}{\omega}$ zurücklegt.

Aufgabe 12: **Bahnkurve II: Zykloide** **(schriftlich, 4 Punkte)**

Ein Radfahrer befährt gerade eine gerade Strecke mit einer konstanten Geschwindigkeit $v_0 = \omega \cdot R$. Die Bahnkurve des Ventils, das sich an einem Fahrradreifen im Abstand R von der Achse befindet, lautet:

$$\vec{r}\,(t) = \begin{pmatrix} \omega\, R\, t - R \sin(\omega\, t) \\ R - R\cos(\omega\, t) \\ 0 \end{pmatrix} .$$



a) Berechnen Sie $\vec{r}\,(t)$ für

$$t = 0\,, \qquad t = \frac{\pi}{2\,\omega}\,, \qquad t = \frac{\pi}{\omega} \qquad \text{und} \qquad t = \frac{2\,\pi}{\omega}$$

und skizzieren Sie $x\,(t)$, $y\,(t)$ und die Bahnkurve in der x-y-Ebene für $0 \le t \le \frac{2\,\pi}{\omega}$.

b) Berechnen Sie

$$|\vec{r}\,(t)|\,, \quad \frac{d}{d\,t}\,|\vec{r}\,(t)|\,, \quad \vec{v}\,(t) = \frac{d}{d\,t}\,\vec{r}\,(t)\,, \quad |\vec{v}\,(t)|\,, \quad \frac{d}{d\,t}\,|\vec{v}\,(t)|\,, \quad \vec{a}\,(t) = \frac{d^2}{d\,t^2}\,\vec{r}\,(t) \quad \text{und} \quad |\vec{a}\,(t)|\,.$$

c) Berechnen Sie die Länge des Weges, den das Ventil von $t_1 = 0$ bis $t_2 = \frac{2\,\pi}{\omega}$ zurücklegt.

Aufgabe 13: **Mittlere Geschwindigkeit** **(schriftlich, 2 Punkte)**

Bei einer Radtour im Gebirge wird das Fahrrad bergauf geschoben ($v_1 = 5$ km/h). Bergab fährt das Rad etwa $v_2 = 45$ km/h schnell. Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit, wenn die Teilstrecken bergauf und bergab gleich sind?

Aufgabe 14: **Addition von Geschwindigkeiten** **(schriftlich, 2 Punkte)**

Um mit einer Rolltreppe von einem Stockwerk zum anderen zu fahren, benötigt man $t_1 = 10$ s. Um über die stehende Rolltreppe zu gehen, benötigt man $t_2 = 30$ s. Wie lange braucht man, wenn man auf der laufenden Rolltreppe geht?