12. Übung zur Physik I (WS 2013/14) **Prof. Kohl/Prof. Rohlfing**

Ausgabedatum: 20./21.01.2014 Abgabedatum: 27./28.01.2014

Aufgabe 77: Komplexe Zahlen (2) (mündlich, 4 Punkte)

a) Bilden Sie für die beiden komplexen Zahlen $z_1 = 3 + 4\,i$ und $z_2 = 12 + 5\,i$ die Summe $z_1 + z_2$, die Differenz $z_1 - z_2$, das Produkt $z_1 \cdot z_2$ und den Quotienten z_1/z_2 (*Hinweis:* Erweitern Sie dazu mit z_2^*).

b) Bestimmen Sie den Betrag, die Phase φ, sowie den Real- und Imaginärteil von

$$z_1 = -i \;, \qquad z_2 = 3 + 4\,i \;, \qquad z_3 = (1+i)^3 \;, \qquad z_4 = \frac{1+i}{1-i} \;, \qquad z_5 = e^{-i\,\frac{\pi}{4}}$$

und stellen Sie die Zahlen in der komplexen Zahlenebene ($\widehat{=}$ Gauß'sche Zahlenebene) dar.

c) Leiten Sie die Moivre-Formel

$$z^n = |z|^n\,(\cos\,\varphi + i\,\sin\,\varphi)^n = |z|^n\,(\cos\,n\,\varphi + i\,\sin\,n\,\varphi)$$

mit Hilfe der Euler-Formel $\cos\,\varphi + i\,\sin\,\varphi = e^{i\,\varphi}$ ab.

d) Zeigen Sie, dass $\cos(i\,\varphi) = \cosh(\varphi)$ und $\sin(i\,\varphi) = i\,\sinh\,\varphi$ gilt.

Aufgabe 78: Erzwungene Schwingung: Frequenzverhalten von Amplitude und Phase (schriftlich, 5 Punkte)

Ein Federpendel (Masse m, Federkonstante D; $\omega_0^2 = \dfrac{D}{m}$) bewegt sich unter dem Einfluss einer Reibungskraft

$$F_R\,(t) \;=\; -2\,\gamma\,m\,\dot{x}\,(t)$$

und wird durch eine periodische Kraft

$$F\,(t) \;=\; F_0\,\cos\,(\omega\,t) \;=\; \mathrm{Re}\,[F_0\,\mathrm{e}^{i\,\omega\,t}]$$

angetrieben.

a) Wie lautet die Bewegungsgleichung für dieses System?

b) Zeigen Sie, dass

$$x_s\,(t) \;=\; x_0\,(\omega)\,\mathrm{e}^{i\,\omega\,t} \;=\; |x_0\,(\omega)|\,\mathrm{e}^{i\,\varphi\,(\omega)}\,\mathrm{e}^{i\,\omega\,t}$$

eine partikuläre Lösung der entsprechenden Bewegungsgleichung zu einer komplexen Anregung ist. Geben Sie $x_0\,(\omega)$, die Amplitude $|x_0\,(\omega)|$ und die Phasenverschiebung $\varphi\,(\omega)$ an.

c) Skizzieren Sie die Amplitude und die Phasenverschiebung für $\gamma > 0$ und $\gamma = 0$.

d) Für welche Frequenz ω wird bei konstanter Amplitude der Kraft $|F_0|$ die Schwingungsamplitude maximal? Vergleichen Sie diese Frequenz mit den Schwingungsfrequenzen des freien Pendels mit und ohne Dämpfung.

Aufgabe 79: Gravitationsdrehwaage **(mündlich, 4 Punkte)**

In der Cavendish-Waage (siehe Abbildung) führen die Kräfte $\vec{F}$ zwischen den beiden Kugelpaaren m_1 und m_2 zu einem Drehmoment M, durch das das Drehpendel mit den Massen m_1 (Trägheitsmoment J, Winkelrichtgröße D^*) um den Winkel φ aus der Ruhelage ausgelenkt wird. Dreht man nun das Massenpaar m_2 wie skizziert von der grau in die weiß skizzierte Position, so ändert das Drehmoment und damit der Drehwinkel sein Vorzeichen.

Die Winkeländerung wird durch die Auslenkung eines am angebrachten Spiegel reflektierten Lichtstrahls gemessen.

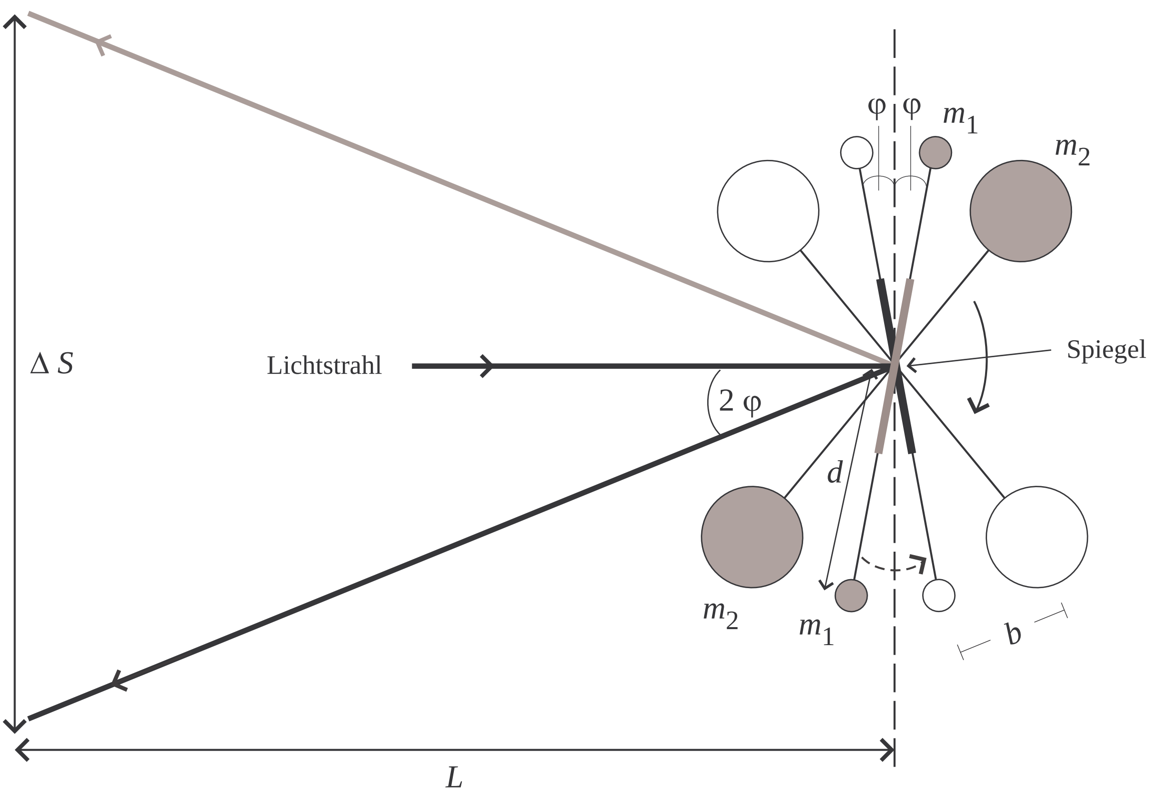
a) Wie ist die Gravitationskonstante G mit dem Drehwinkel φ verknüpft?

b) Wie kann die Winkelrichtgröße D^* aus der Schwingungsdauer des Drehpendels bestimmt werden? Welcher Ausdruck ergibt sich damit für die Gravitationskonstante?

Für die im Hörsaal installierte Gravitationsdrehwaage gelten folgende Werte:

- Abstand der Massenmittelpunkte von m_1 und m_2: $b = 47$ mm
- Abstand der Bleikugeln m_1 von der Drehachse: $d = 5$ cm
- Masse der großen Bleikugeln: $m_2 = 1{,}5$ kg
- Abstand zwischen Spiegel und Detektor: $L = 0{,}7$ m

In der Vorlesung wurden gemessen: Schwingungsdauer $T = \frac{59}{6}$ min $= 590$ s. Abstand zwischen den Endlagen: $\Delta S = (56{,}3 - 34{,}0)$ mm $= 22{,}3$ mm. Was ergibt sich daraus für die Gravitationskonstante G? Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Literaturwert.



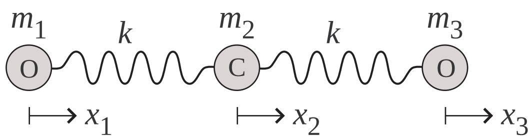
Aufgabe 80: **Eigenwertproblem** **(mündlich, 2 Punkte)**

Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren der Matrix

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 81: **Molekülschwingungen** **(schriftlich, 5 Punkte)**

Das CO_2-Molekül lässt sich in einem einfachen Modell wie folgt darstellen:



Zwischen benachbarten Atomen wirken „Federkräfte“ mit der Federkonstanten k.

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für die Auslenkungen x_j der drei Atome aus den Ruhelagen auf.

b) Lösen Sie die Differentialgleichungen durch einen geeigneten Ansatz und bestimmen Sie die Eigenfrequenzen.

c) Geben Sie für die Eigenschwingungen die jeweiligen Auslenkungsmuster an.