Das 3-Körper-Problem

Matthias Kemper und Guido Willems

11. Januar 2012

1 Historischer Überblick

17. Jhdt. verschiedene Spezialfälle von Johannes Kepler behandelt

18. Jhdt. Joseph-Louis Lagrange findet eine Dreieckslösung für Körper gleicher Masse

1885 Der schwedische König Oscar II. schreibt einen Preis für eine Reihenlösung des N-Körper-Problems aus. Man erwartet ein viel tieferes Verständnis der Planetenbewegungen aus dieser Lösung.

1887 Ein Theorem von Heinrich Bruns über die Nichtexistenz weiterer Erhaltungsgrößen außer den allgemein bekannten ist Anlass des bis heute verbreiteten Gerüchts der „Unlösbarkeit" des 3-Körper-Problems.

1888-90 Henri Poincaré erhält den König-Oscar-Preis für eine Arbeit über die Stabilität und Lösungen des eingeschränkten Dreikörperproblems (zwei Körper fixiert). Die Veröffentlichung dieser Arbeit zieht sich hin, da nach dem ersten Druck ein schwerer Fehler gefunden wurde, der auch dem Preiskomitee entgangen ist. Um diese Peinlichkeit zu vertuschen, versucht dessen Vorsitzender, der auch gleichzeitig Herausgeber der Zeitschrift ist, die bereits verteilten Exemplare zurückzurufen. Für den Druck der ersten Auflage muss Poincaré selbst aufkommen – deren Preis von ca. 3600 Kronen übersteigt das Preisgeld um mehr als 1000 Kronen[1].

1909 Karl Sundman löst das 3-Körper-Problem durch eine Reihenentwicklung.

1990 Wang Qiu-Dong verallgemeinert Sundmans Lösung auf das N-Körper-Problem.

20. Jhdt Durch das Aufkommen numerischer Situationen werden zahlreiche spezielle Lösungen entdeckt und daraufhin auch analytisch untersucht.

[1] Zum Vergleich: Der Herausgeber der Zeitschrift hatte ein Jahreseinkommen von 7000 Kronen.

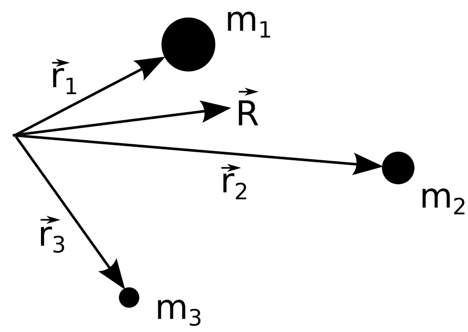

Abbildung 1: Verwendete Bezeichnungen beim 3-Körper-Problem.

2 Das N-Körper-Problem

Das allgemeine N-Körper-Problem setzt sich aus folgendem zusammen:

- N punktförmige Teilchen im $\mathbb{R}^3$ mit Massen m_i $(i = 1, \ldots, N)$
- Zwischen je zwei Teilchen wirkt eine Kraft in Richtung der Verbindungsachse:

$$\vec{F}_{ij} = C \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_i)$$

- Gegebene Anfangsbedingungen: $\vec{r}_i(t_0), \vec{v}_i(t_0)$

In der Natur treten Kräfte dieser Form sowohl beim NEWTONschen Gravitationsgesetz ($C = G$) als auch beim COULOMBschen Gesetz ($C = -1/4\pi\varepsilon_0$, Ladungen q_i statt Massen im Kraftgesetz) auf. Im Folgenden werden wir der Einfachheit halber den Fall des Gravitationsgesetzes behandeln, die Ergebnisse sind jedoch direkt übertragbar.

Die vorkommenden Größen im Falle des 3-Körper-Problems sind in Abb. 1 dargestellt. Es ergeben sich folgende Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + G \frac{m_1 m_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) \\
m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= G \frac{m_2 m_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_3 - \vec{r}_2) + G \frac{m_2 m_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\
m_3 \ddot{\vec{r}}_3 &= G \frac{m_3 m_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_3) + G \frac{m_3 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_3)
\end{aligned}$$

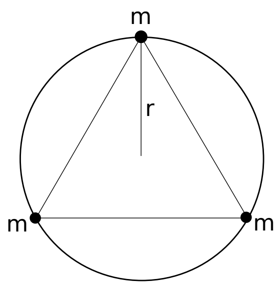

Abbildung 2: Drei Körper gleicher Masse in Form eines gleichseitigen Dreiecks

3 Spezialfälle

Im Folgenden werden einige spezielle 3-Körper-Konfigurationen vorgestellt, die besonders einfach und daher analytisch lösbar sind oder ein interessantes Verhalten zeigen. Java-Applets zur Darstellung der numerischen Simulation lassen sich in [but06] finden.

3.1 Gleichseitiges Dreieck

Bereits 1772 untersuchte LAGRANGE den Spezialfall von Körpern gleicher Masse, die in Form eines gleichseitigen Dreiecks angeordnet sind (vgl. Abb. 2). Dieser Fall lässt sich unter Ausnutzung der zahlreichen Symmetrien leicht analytisch berechnen. Die auf einen Körper wirkende Gravitationskraft entspricht der für die Kreisbewegung notwendigen Zentripetalkraft:

$$\frac{mv^2}{r} = G\frac{m^2}{(\sqrt{3}r)^2}\cos\frac{\pi}{6} + G\frac{m^2}{(\sqrt{3}r)^2}\cos\frac{\pi}{6} = G\frac{\sqrt{3}m^2}{3r^2}$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{Gm}{r}}$$

Dabei wurde ausgenutzt, dass ein gleichseitiges Dreieck mit Umkreisradius r die Seitenlänge $\sqrt{3}r$ hat. Bei Vorgabe von Radius r und Masse m kann man so auf die für eine Kreisbewegung notwendige Bahngeschwindigkeit schließen.

Diese Figur ist allerdings nicht stabil, wie man eindrucksvoll an numerischen Simulationen beobachten kann, da die nach einiger Zeit entstehenden Abweichungen plötzlich zu einem völlig chaotischen Verhalten führen können.

Auch mit unterschiedlichen Massen lassen sich ähnliche Dreieckskonstellationen konstruieren, bei denen der Abstand allerdings periodisch schwankt.

Eine weitere spezielle Form stellt der Fall da, in dem eine Masse gegenüber den anderen vernachlässigbar klein ist. So eine Masse kann sich stabil am sogenannten LAGRANGEschen Punkt aufhalten, der mit den beiden größeren Körpern ein gleichseitiges Dreieck bildet.

2010 wurde ein Asteroid entdeckt, der sich am LAGRANGEpunkt des Erde-Mond-Systems befindet.

3.2 Acht

In einer weiteren faszinierenden 3-Körper-Choreographie bewegen sich die Körper periodisch auf einer Bahn in Form einer 8. Diese Bewegung wurde erst 1993 numerisch entdeckt und konnte fast 10 Jahre später auch analytisch erklärt werden (s. [mon01]). Im Unterschied zur LAGRANGEschen Lösung ist diese Bewegung stabil – auch bei größeren Störungen der Anfangspositionen oder -geschwindigkeiten ist immer noch dasselbe Bewegungsmuster zu erkennen. Zur besseren Veranschaulichung sei hier erneut auf [but06] verwiesen.

4 Formulierung im Hamilton-Formalismus

Zur formalen Untersuchung des N-Körper-Problems betrachten wir seine Formulierung im Hamilton-Formalismus:

Auf das i-te Teilchen wirkt die Kraft

$$\vec{F}_i = G\sum_{j=1}^{N} \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3}(\vec{r}_j - \vec{r}_i) = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V$$

mit dem Potential

$$V = -G\sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}.$$

Damit schreibt sich die von $6N$ Koordinaten ($3N$ Ortskoordinaten $\vec{r}_i$ und $3N$ Impulskoordinaten $\vec{p}_i$) abhängige Hamiltonfunktion als

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} + V.$$

Die kanonischen Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}_i &= \vec{\nabla}_{\vec{p}_i} H = \frac{\vec{p}_i}{m_i} \\ \text{und} \qquad \dot{\vec{p}}_i &= -\vec{\nabla}_{\vec{r}_i} H = G\sum_{j=1}^{N} \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3}(\vec{r}_j - \vec{r}_i) \end{aligned} \tag{1}$$

bilden also ein *System aus* $6N$ *gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung.*

Mit diesem Wissen über die Natur des Problems kann man nun auf allgemeine Aussagen der Mathematik zurückgreifen, bspw. auf folgenden

Satz (PICARD-LINDELÖF): *Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $v : G \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung, die lokal einer Lipschitz-Bedingung*[2] *genügt. Dann gibt es zu jeder Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$ in einer Umgebung von $(t_0, x_0) \in G$ eine Lösung der Differentialgleichung $\dot{x}(t) = v(t, x(t))$.*
Diese Lösung ist eindeutig.

Wie lässt sich dies auf das N-Körper-Problem anwenden?

- Die Zahl der Koordinaten entspricht der Zahl der Differentialgleichungen $n = 6N$, als Koordinatenvektor hat man $x = (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N)$
- Man wählt $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \backslash \{\text{Kollisionen}\}$, um Singularitäten im Nenner des Potentials zu vermeiden.[3]
- v ist die rechte Seite der kanonischen Gleichungen (1), die auf ganz G definiert sind; damit ist v offensichtlich stetig und stetig partiell differenzierbar.

Damit sind alle Voraussetzungen des Satzes von PICARD-LINDELÖF erfüllt, also hat das N-Körper-Problem *lokal* eine eindeutige Lösung!

Andere Versionen des Satzes garantieren sogar die Existenz und Eindeutigkeit bis zur Kollision. Aber auch das schafft noch keine Befriedigung, denn wie die Lösung denn jetzt genau aussieht verrät uns die Mathematik nicht.

5 Behandlung des 2-Körper-Problems

Um mögliche Methoden zur Lösung des 3-Körper-Problems zu untersuchen, wollen wir uns zunächst einmal das Vorgehen bei der Lösung des 2-Körper-Problems anschauen. Gesucht werden die Werte von $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{p}_1, \vec{p}_2$, bestimmt durch je eine Differentialgleichung erster Ordnung.

5.1 Koordinatentransformation

Als erste Vereinfachung transformiert man das Problem auf Schwerpunkts- und Relativkoordinaten:

$$\vec{R} := \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \qquad \vec{r} := \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

Die zugehörigen kanonischen Impulse erhält man aus der Lagrangefunktion:

$$\vec{P} = \vec{\nabla}_{\vec{R}} \mathscr{L} = M\dot{\vec{R}}, \qquad \vec{p} = \vec{\nabla}_{\vec{r}} \mathscr{L} = \mu \dot{\vec{r}}$$

[2] lokal gibt es ein $L \geq 0$, sodass $|v(t,x) - v(t,x')| \leq L|x - x'|$ für alle x, x'; folgt aus stetiger partieller Differenzierbarkeit

[3] Die Menge der Kollisionen ist als endliche Vereinigung linearer Unterräume niedrigerer Dimension abgeschlossen, sodass ihr Komplement G wie gewünscht offen ist.

mit der Gesamtmasse $M = m_1 + m_2$ und der reduzierten Masse $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$. Die Hamiltonfunktion lautet dann:

$$H = \frac{P^2}{2M} + \frac{p^2}{2\mu} + G\frac{\mu}{|\vec{r}|}$$

Wie man an der kanonischen Gleichung

$$\dot{\vec{P}} = \vec{\nabla}_{\vec{R}} H = 0$$

sehen kann, ist der Gesamtimpuls zeitlich konstant, also lässt sich die Gleichung $\dot{\vec{R}} = P/M$ direkt integrieren und durch Einsetzen der Anfangsbedingungen erhält man die Lösung für $\vec{R}$. Für das weitere Vorgehen kann man sich also auf die reduzierte Hamiltonfunktion

$$H' = \frac{p^2}{2\mu} + G\frac{\mu}{|\vec{r}|}$$

beschränken. Damit verbleiben nur noch 6 Variablen $\vec{p}, \vec{r}$.

5.2 Drehimpulserhaltung

Aus der Erhaltung des Gesamtdrehimpulses folgt auch die Erhaltung des Relativdrehimpulses $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. Des Weiteren ist die Bewegung auf die Ebene senkrecht zu $\vec{L}$ beschränkt, da $\vec{r} \cdot \vec{L} = \vec{r} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) = 0$. Also kann man Polarkoordinaten $r, \varphi \Rightarrow p_r = \mu\dot{r}, p_\varphi = \mu r^2\dot{\varphi} = |\vec{L}|$ einführen, die Hamiltonfunktion wird damit zu

$$H = \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{p_\varphi^2}{2\mu r^2} - G\frac{\mu}{r}.$$

Sie ist unabhängig von φ, also folgt $p_\varphi = const.$ aus den Anfangsbedingungen und nur noch 3 Variablen φ, r, p_r verbleiben.

5.3 Energieerhaltung

Auch die Energie H ist eine Erhaltungsgröße; Auflösen der Energiegleichung nach p_r liefert

$$p_r = \mu\dot{r} = \pm\sqrt{2\mu H - \frac{L^2}{r^2} + \frac{2G\mu^2}{r}}.$$

Diese Gleichung lässt sich durch Trennung der Variablen integrieren und man erhält

$$t - t_0 = \pm\mu\int_{r_0}^{r}\left(2\mu H - \frac{L^2}{r'^2} + \frac{2G\mu^2}{r'}\right)^{-1/2} \mathrm{d}r'.$$

Daraus folgt $r(t)$. Damit wiederum erhält man auch die Lösung für φ:

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{\mu r^2} \quad \rightarrow \quad \varphi(r(t))$$

6 Symmetrien und Erhaltungsgrößen

Bei der Behandlung des Zweikörperproblems wurden die Bewegungsgleichungen durch sukzessives Ausnutzen von Erhaltungsgrößen immer weiter vereinfacht, bis sie schließlich direkt integriert werden konnten. Um zunächst einmal die Erhaltungsgrößen (im Englischen *first integrals*, was auf ihren Zweck hindeutet) eines Systems zu bestimmen, benötigt man die Symmetrieeigenschaften. Daraus lassen sie sich formal mittels des folgenden Theorems ableiten:

Theorem (NOETHER): *Ändert sich die Lagrangefunktion $\mathscr{L}$ eines Systems unter einer 1-Parameter-Gruppe von Transformationen $q'_k = h_s(q_k)$ mit $q_k = h_0(q_k)$ nur um eine Zeitableitung $\dot{K}$ (bei infinitesimaler Transformation), dann ist*

$$\sum_k \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k - K \quad \textit{mit} \quad \delta q_k = \left.\frac{\partial h_s}{\partial s}\right|_{s=0}$$

eine Erhaltungsgröße.

Die Lagrangefunktion des N-Körper-Problems lautet

$$\mathscr{L}(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 + G \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}.$$

6.1 Energieerhaltung

Bei Zeitverschiebung $\vec{r}'_i(t) = \vec{r}_i(t+s)$ ($\Rightarrow \delta \vec{r}_i = \dot{\vec{r}}_i$) ändert sich die Lagrangefunktion um

$$\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} \mathscr{L}\left(\vec{r}_i(t+s), \dot{\vec{r}}_i(t+s), t+s\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathscr{L}\left(\vec{r}_i(t), \dot{\vec{r}}_i(t), t\right).$$

Also ist die Gesamtenergie

$$H = \sum_i \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \dot{\vec{r}}_i - \mathscr{L}$$

des Systems erhalten.

6.2 Impulserhaltung

Bei Translation $x'_i = x_i + s$ ($\Rightarrow \delta \vec{r}_i = (1,0,0)$) in x-Richtung ist $|\vec{r}'_j - \vec{r}'_i| = |\vec{r}_j - \vec{r}_i|$ und $\dot{\vec{r}}'_i = \dot{\vec{r}}_i$, die Lagrangefunktion bleibt also unverändert. Damit ist die x-Komponente des Gesamtimpulses

$$\sum_i \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot (1,0,0) = \sum_i m_i \dot{x}_i = P_x$$

eine Erhaltungsgröße. Analoges zeigt man für die y- und z-Komponente, also ist der Gesamtimpuls $\vec{P}$ der Schwerpunktsbewegung erhalten.

6.3 Drehimpulserhaltung

Eine Drehung um die z-Achse lässt sich als $\vec{r}_i' = R(s)\vec{r}_i$ mit einer Rotationsmatrix $R(s)$ beschreiben. Für infinitesimale Drehungen ist $\delta\vec{r}_i = (-y, x, 0)$; die Lagrangefunktion ändert sich nicht, da Abstände und Geschwindigkeitsbeträge unter Rotationen konstant bleiben. Daraus folgt die Erhaltung von

$$\sum_i \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot (-y, x, 0) = \sum_i m_i \left(x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i \right) = L_z,$$

also der z-Komponente des Drehimpulses. Analog zeigt man die Erhaltung der anderen Komponenten.

6.4 Schwerpunktskoordinaten

Unter infinitesimalen Galileo-Boosts $x_i' = x_i + s \cdot t$ in x-Richtung ändert sich die Lagrangefunktion um

$$\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} \mathscr{L}' = \sum_i m_i \dot{x}_i = M\dot{R}_x.$$

Wegen $\delta x_i = t$ ist also die Größe

$$\sum_i m_i \dot{x}_i t - MR_x = M(\dot{R}_x t - R_x)$$

erhalten. Wegen $\dot{\vec{R}} = \vec{P}/M = \mathit{const.}$ erhält man daraus unter Einbeziehung aller weiteren Koordinaten

$$\vec{R} = \vec{R}_0 + \frac{\vec{P}}{M} t,$$

d. h. der Schwerpunkt bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit. Somit lässt sich ein Koordinatensystem wählen, in dem der Schwerpunkt ruht.

Alle in diesem Abschnitt gefundenen Erhaltungsgrößen sind in Tabelle 1 aufgeführt.

Tabelle 1: Erhaltungsgrößen des N-Körper-Problems

Erhaltungsgröße	**Dimensionen**
Energie H	1
Gesamtimpuls $\vec{P}$	3
Schwerpunktkoordinaten $\vec{R}$	3
Gesamtdrehimpuls $\vec{L}$	3
	10

7 (Nicht-)Integrabiliät

Durch geschickte Ausnutzung der Erhaltungsgrößen lassen sich die Bewegungsgleichungen direkt integrieren, dieses Vefahren wird als *Quadratur* bezeichnet. Dabei kann man durch jede Erhaltungsgröße eine Bewegungsgleichung (Dgl. 1. Grades) eliminieren. Lässt sich ein Problem auf diesem Wege lösen, so ist es *integrabel.* In Abschnitt 5 konnten wir auf diesem Wege das 2-Körper-Problem mit $6 \cdot 2 = 12$ Gleichungen auf zwei direkt integrierbare Dgl. reduzieren.

Für das 3-Körper-Problem bleiben $6 \cdot 3 = 18$ Gleichungen. Die 10 Erhaltungsgrößen, die in Abschnitt 6 gefunden wurden, sind dafür zu wenig – *das Dreikörperproblem ist nicht integrabel.*

Nun könnte man vermuten, dass es vielleicht noch weitere Erhaltungsgrößen gibt, die eine Lösung über Quadratur ermöglichen. Dass dem nicht so ist, garantiert ein

Theorem (BRUNS): *Jede in Orten, Impulsen und Zeit algebraische Erhaltungsgröße ist eine algebraische Funktion in den klassischen Erhaltungsgrößen.*

Im Laufe der Jahre wurde dieses Theorem immer weiter verbessert und verallgemeinert, eine aktuelle Fassung findet sich in [jul00]. Daraus folgt aber noch lange nicht allgemein die Unlösbarkeit des 3-Körper-Problems – nur die Nicht-Integrabilität!

8 Die exakte Lösung des Dreikörperproblems

Dem finnischen Mathematiker und Astronomen KARL FRITHIOF SUNDMAN ist es Anfang des 20. Jahrhunderts gelungen, unter gewissen Voraussetzungen eine exakte analytische Lösung des Dreikörperproblems in Form einer Reihenentwicklung anzugeben (vgl. Abschnitt 1). In Abschnitt 4 hatten wir erkannt, dass die Existenz einer eindeutigen Lösung immer nur in einer zeitlichen Umgebung der Anfangsbedingungen durch den Satz von Picard-Lindelöff garantiert wird. Beim Dreikörperproblem lässt sich diese Umgebung jeweils bis zu einer Kollision der Körper ausdehnen. Im Falle einer Kollision wird nämlich die Kraft auf die beteiligten Teilchen

$$\vec{F}_i = G \sum_{j=1}^{N} \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_i)$$

in der Bewegungs-DGL

$$\vec{F}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i$$

unendlich groß und die Lipschitz-Bedingung wird verletzt.

Um eine exakte Lösung zu finden, die für alle Zeiten t gilt, musste SUNDMAN die Kollisionen in geeigneter Weise eliminieren. Offensichtlich können wir zwei Typen von Kollisionen unterscheiden:

1. Alle Körper kollidieren gleichzeitig im gleichen Punkt
2. Nur zwei Körper kollidieren miteinander

Den ersten Typ konnte SUNDMAN unter gewissen physikalischen Voraussetzungen ausschließen (vgl. Abschnitt 9). Den zweiten Kollisionstyp konnte er auf mathematischem Weg durch eine Regularisierung der Bewegungsgleichung mit Hilfe einer geeigneten Variablentransformation unschädlich machen (vgl. Abschnitt 10).

9 Das Sundman-Theorem

Theorem (SUNDMAN): *Es sei das obige Dreikörperproblem gegeben und das Koordinatensystem so gewählt, dass der Ursprung mit dem Schwerpunkt zusammenfällt. Erfüllen die Anfangsbedingungen zu einem belieben Zeitpunkt t_0 die Bedingung*

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{3} m_i \left(\vec{r}_i(t_0) \times \vec{v}_i(t_0)\right) \neq 0,$$

so tritt eine Kollision 1. Art während der gesamten Bewegung niemals auf.

Wir wollen dieses Theorem beweisen, indem wir zeigen, dass der Gesamtdrehimpuls

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{3} m_i(\vec{r}_i(t_\mathrm{K}) \times \vec{v}_i(t_\mathrm{K}))$$

bei einer Kollision 1. Art zum Zeitpunkt t_K verschwindet. Da der Drehimpuls immer konstant bleibt (vgl. Abschnitt 6.3), folgt das Theorem dann unmittelbar.

Bei einer Kollision liegt der Kollisionspunkt im Ursprung, andernfalls wäre die Erhaltung des Schwerpunkts verletzt.

Wir schätzen für diesen Fall zunächst den Drehimpuls $\left|\vec{L}\right|$ gegen etwas Größeres ab. Die Zeitabhängigkeit einiger Größen wurde aus Gründen der Übersichtlichkeit z. T. weggelassen:

$$\begin{aligned}\left|\vec{L}\right| &= \left|\sum_{i=1}^{3} m_i(\vec{r}_i \times \vec{v}_i)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{3} m_i \left|(\vec{r}_i \times \vec{v}_i)\right| = \sum_{i=1}^{3} m_i r_i v_i \sin\alpha_i \leqslant \sum_{i=1}^{3} m_i r_i v_i \\ &= \sum_{i=1}^{3} \sqrt{m_i} r_i \cdot \sqrt{m_i} v_i = \begin{pmatrix} \sqrt{m_1} r_1 \\ \sqrt{m_2} r_2 \\ \sqrt{m_3} r_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{m_1} v_1 \\ \sqrt{m_2} v_2 \\ \sqrt{m_3} v_3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$= \left|\begin{pmatrix} \sqrt{m_1} r_1 \\ \sqrt{m_2} r_2 \\ \sqrt{m_3} r_3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} \sqrt{m_1} v_1 \\ \sqrt{m_2} v_2 \\ \sqrt{m_3} v_3 \end{pmatrix}\right| \cdot \cos\gamma \leqslant \left|\begin{pmatrix} \sqrt{m_1} r_1 \\ \sqrt{m_2} r_2 \\ \sqrt{m_3} r_3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} \sqrt{m_1} v_1 \\ \sqrt{m_2} v_2 \\ \sqrt{m_3} v_3 \end{pmatrix}\right|$$

$$= \underbrace{\sqrt{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2}}_{=:\sqrt{I(t)}} \cdot \underbrace{\sqrt{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + m_3 v_3^2}}_{=:\sqrt{2T(t)}} = \sqrt{2IT}$$

Darin sind die kinetische Energie

$$T(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} m_i v_i^2(t)$$

und das Trägheitsmoment

$$I(t) = \sum_{i=1}^{3} m_i r_i^2(t)$$

i. A. zeitabhängige Größen. Daher können wir die zweite zeitliche Ableitung des Trägheitsmoments berechnen:

$$\ddot{I}(t) = 2 \underbrace{\sum_{i=1}^{3} m_i v_i^2(t)}_{=2T} + 2 \sum_{i=1}^{3} \underbrace{m_i (\vec{r}_i(t) \cdot \ddot{\vec{r}}_i(t))}_{=\vec{F}_i(\vec{r}_i(t)) \cdot \vec{r}_i(t) \ \text{(Newton)}}$$

$$= 4T - 2 \sum_{i=1}^{3} \vec{r}_i \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)$$

Die Summe lässt sich durch Anwendung des Satzes von Euler

$$\sum_{i=1}^{3} \vec{r}_i \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = -V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)$$

weiter vereinfachen, da das Potential eine homogene Funktion vom Grad -1 ist. Es folgt also

$$\ddot{I}(t) = 4T(t) + 2V(t) = 2T(t) + 2(T(t) + V(t)) = 2T(t) + 2E_{\text{ges}}.$$

Aus der Abschätzung des Drehimpulses kennen wir die Relation

$$L \leqslant \sqrt{2I(t)T(t)} \quad \Leftrightarrow \quad T(t) \geqslant \frac{L^2}{2I(t)}.$$

Durch Einsetzen in $\ddot{I}(t)$ erhalten wir dann mit

$$\ddot{I}(t) \geqslant \frac{L^2}{I(t)} + 2E_{\text{ges}}$$

eine Relation, in der bis auf das Trägheitsmoment nur Erhaltungsgrößen vorkommen. Kurz vor einer Kollision 1. Art bewegen sich alle Körper in Richtung Ursprung, das Trägheitsmoment $I(t)$ wird kleiner und es gilt $\dot{I}(t) \leqslant 0$. Wir multiplizieren die Relation mit $\dot{I} \leqslant 0$ und erhalten

$$\dot{I}\ddot{I} \leqslant L^2 \frac{\dot{I}}{I} + 2E_{\text{ges}}\dot{I}.$$

Diese Ungleichung lässt sich leicht in den Grenzen t_1 und t_2 integrieren, dabei sind t_1 und t_2 mit $t_1 \leqslant t_2$ Zeitpunkte unmittelbar vor einer Kollision zum Zeitpunkt t_K. Es ergibt sich

$$\left[\frac{1}{2}\dot{I}^2\right]_{t_1}^{t_2} \leqslant \left[L^2 \cdot \ln(I) + 2E_{\text{ges}} I\right]_{t_1}^{t_2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{+\frac{1}{2}\dot{I}^2(t_2)}_{(*)} - \frac{1}{2}\dot{I}^2(t_1) \leqslant L^2 \ln\frac{I(t_2)}{I(t_1)} + 2E_{\text{ges}} \cdot I(t_2) \underbrace{-2E_{\text{ges}} \cdot I(t_1)}_{(*)}$$

Die Ungleichung bleibt richtig, wenn die mit $(*)$ markierten Terme weggelassen werden:

$$-\frac{1}{2}\dot{I}^2(t_1) \leqslant L^2 \ln\frac{I(t_2)}{I(t_1)} + 2E_{\text{ges}} \cdot I(t_2)$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2}\dot{I}^2(t_1) + 2E_{\text{ges}} \cdot I(t_2)}{\ln\frac{I(t_1)}{I(t_2)}} \geqslant L^2$$

Nun lassen wir t_2 gegen die Kollisionszeit t_K konvergieren: Das Trägheitsmoment $I(t_2)$ verschwindet und damit die gesamte linke Seite. Folglich verschwindet auch der Gesamtdrehimpuls L.

10 Regularisierung der Bewegungsgleichung

Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, dass die gleichzeitige Kollision aller drei Körper im Falle eines nichtverschwindenden Gesamtdrehimpulses $\vec{L} \neq 0$ aus physikalischen Gründen unmöglich ist. Eine Kollision zweier Körper, bei der sich der dritte Körper an einem anderen Ort befindet, ist aber durchaus möglich. Eigentlich gefährdet eine solche Kollision die Existenz und Eindeutigkeit einer exakten Lösung, da die Kraft zwischen den Körpern divergiert. Sundman konnte die Bewegungsgleichung für das Dreikörperproblem jedoch durch eine geschickte Variablentransformation in eine DGL ohne Singularität überführen. Wir wollen diesen Vorgang anhand der DGL für das Zweikörperproblem nachvollziehen. Wir betrachten die DGL des Zweikörperproblems:

$$m\ddot{\vec{r}} = -GMm\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Darin beschreibt die Variable $\vec{r}$ den Differenzvektor zwischen den beiden Körpern. Beim Zweikörperproblem verläuft die Bewegung in einer Ebene wegen

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = \vec{r} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) = 0.$$

Bei der Wahl des Koordinatensystems können wir uns also auf 2 Dimensionen x, y beschränken. Statt der üblichen Basis aus Einheitsvektoren $[\vec{e}_x, \vec{e}_y]$, können wir auf die Basis $[1, \mathrm{i}]$ zurückgreifen und die Bewegung in der komplexen Zahlenebene beschreiben. Der Ortsvektor $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$ geht dann über in eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ mit $z = x + \mathrm{i}y$. In dieser Notation lautet die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{z} = -GMm\frac{z}{|z|^3}.$$

Eine geeignete Variablentransformation zur Regulariserung dieser DGL ist

$$\omega(s) = \sqrt{z(t)}, \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = r(t), \quad \text{wobei } \omega \in \mathbb{C} \text{ und } s \in \mathbb{R} \text{ sind.}$$

Die komplexe Bahnkurve $z(t)$ geht also in eine neue komplexe „Bahnkurve“ $\omega(s)$ über, die nicht mehr nach der Zeit t, sondern nach einer neuen reellen Variable s parametrisiert ist.

Im Folgenden müssen wir versuchen, die bisherigen Größen z, t in der Bewegungsgleichung durch die neuen Variablen ω, s auszudrücken. Durch Anwenden einfacher Ableitungsregeln lassen sich sukzessive folgende Relationen zwischen neuen und alten Variablen finden:

$$\begin{aligned}
z &= \omega^2 \\
r &= |z| = |\omega^2| = |\omega|^2 \\
z' &:= \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\omega^2 = 2\omega\omega' \\
r' &:= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\omega\omega^* = \omega'\omega^* + \omega\omega'^*
\end{aligned}$$

Damit lassen sich nun $\dot{z}$ und $\ddot{z}$ in den neuen Variablen ausdrücken:

$$\begin{aligned}
\dot{z} &:= \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{z'}{r} = \frac{2\omega\omega'}{r} = \frac{2\omega\omega'}{|\omega|^2} \\
\ddot{z} &:= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{z} = \frac{2|\omega|^2\omega'^2 + 2|\omega|^2\omega\omega'' - 2\omega\omega'(\omega'\omega^* + \omega\omega'^*)}{|\omega|^6}
\end{aligned}$$

Schließlich können wir z und $\ddot{z}$ in der Bewegungsgleichung durch die neuen Variablen ersetzen:

$$m\ddot{z} = -GMm\frac{z}{|z|^3}$$

$$\Rightarrow \frac{2|\omega|^2\omega'^2 + 2|\omega|^2\omega\omega'' - 2\omega\omega'(\omega'\omega^* + \omega\omega'^*)}{|\omega|^6} = +GM\frac{\omega^2}{|\omega|^6} = 0$$

Durch Kürzen und Ausmultiplizieren folgt hieraus:

$$2\omega'' - \left(2|\omega'|^2 - GM\right)\frac{1}{|\omega|^2}\omega = 0 \qquad (*)$$

Beim Zweikörperproblem bleibt die Gesamtenergie $E_{\text{ges}} = T + V$ erhalten. In der Notation mit komplexen Zahlen schreibt sich diese Gleichung zu

$$E_{\text{ges}} = \frac{1}{2}m|\dot{z}|^2 - \frac{GMm}{r}.$$

Hier können wir $\dot{z}$ und r aus den obigen Relationen einsetzen und erhalten

$$E_{\text{ges}} = \frac{1}{2}m\left|\frac{2\omega\omega'}{|\omega|^2}\right|^2 - \frac{GMm}{|\omega|^2}.$$

Hieraus folgt durch Umstellen

$$\left(2|\omega'|^2 - GM\right)\frac{1}{|\omega|^2} = \frac{E_{\text{ges}}}{2m}.$$

Die linke Seite lässt sich unmittelbar in $(*)$ einsetzen. Mit diesem entscheidenden Schritt wird die Variable $|\omega|^2$ im Nenner eliminiert und es verbleibt die einfache Differentialgleichung

$$\omega'' - \frac{E_{\text{ges}}}{2m}\omega = 0$$

mit der für alle reellen Parameter s eindeutigen Lösung

$$\omega(s) = A\cosh\left(\sqrt{\frac{E_{\text{ges}}}{2m}}s\right) + B\sinh\left(\sqrt{\frac{E_{\text{ges}}}{2m}}s\right).$$

sinh und cosh lassen sich zudem auf ganz $\mathbb{C}$ in konvergente Potenzreihen entwickeln:

$$\cosh(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\xi^{2k}}{(2k)!}$$

und

$$\sinh(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\xi^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Sundman konnte durch Anwenden einer ähnlichen Transformation und anschließender Rücktransformation eine analytische Lösung in Form einer Reihenentwicklung angeben. Für praktische Berechnungen kann diese Reihenentwicklung allerdings nicht mit anderen rein numerischen Lösungsverfahren mithalten: Um eine Genauigkeit in der Größenordnung der Messgenauigkeit bei astronomischen Messungen zu erreichen, müssen in der Reihenentwicklung rund $8 \cdot 10^{8\cdot 10^6}$ Terme aufsummiert werden!

11 Ausblick

Das Sundman-Theorem aus Abschnitt 9 lässt sich trivial auf das N-Körperproblem verallgemeinern. Im Wesentlichen laufen die verwendeten Summen im Beweis dann nicht bis 3, sondern bis N. Eine Kollision zwischen allen N Körpern ist auch hier nur bei verschwindendem Gesamtdrehimpuls möglich. Beim N-Körperproblem können jedoch nicht nur Kollisionen zwischen 2 Körpern, sondern auch kompliziertere Kollisionen, an denen mehr als 2 Körper beteiligt sind, auftreten. Sundmans Ansatz, auch für diesen Fall die Bewegungsgleichungen zu regularisieren, funktioniert dann nicht mehr - die Verallgemeinerung der Reihenentwicklung auf N Körper ist daher erst in den Neuziger Jahren dem chinesischen Physikstudenten Qiudong Wang gelungen. Aber sogar das N-Körperproblem ist analytisch lösbar!

Literatur

[vol08] S. B. Volchan: *Some insights from total collapse in the N-body problem.* Am. J. Phys. **76**(11), 1034-1039 (2008).

[but06] E. Butikov: *Collection of Remarkable Three-Body Motions* (2006), `http://faculty.ifmo.ru/butikov/Projects/Collection.html`.

[mon01] R. Montgomery: *A New Solution to the Three-Body Problem.* Notices of the AMS **48**(5), 471-481 (2001).

[jul00] E. Julliard-Tosel: *Bruns' Theorem: The Proof and some Generalizations.* Celest. Mech. Dynam. Astron. **76**, 241-281 (2000).

[gut98] M. Gutzwiller: *Moon-Earth-Sun: The oldest three-body problem.* Rev. Mod. Phys. **70**(2), 589-639 (1998).

[dia96] F. Diacu: *The Solution of the n-body Problem.* The Mathematical Intelligencer **18**(3), 66-70 (1996).

[wul10] R. Wulkenhaar: Vorlesungsskript *Integrationstheorie*, WS 2010/11.

[hen01] M. Henkel: *Sur la solution de Sundman du problème des trois corps*, Philos. Sci. **5**(2), 161-184 (2001)