Seminar zur Theorie der Atome, Kerne und kondensierten Materie

WS11/12

Supersymmetrische Quantenmechanik

25. Dezember 2011

Thorsten Schimannek

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Supersymmetrie beschreibt eine Symmetrie zwischen bosnischen und fermionischen Zuständen, die SUSY-Transformation wandelt also Besonnen in Fermionen und Fermionen in Besonnen um. Dazu wird jedem bekannten Teilchen des Standardmodells ein Superpartner zugeordnet. Die Suche nach diesen neuen Teilchen wird derzeit intensiv, unter anderem am LHC in Genf, betrieben. Dass diese Teilchen bislang noch nicht beobachtet werden konnten liegt daran dass die Supersymmetrie (sofern sie in der Natur realisiert ist) gebrochen sein muss. Der genaue Mechanismus dieser Brechung ist unbekannt und kann letztendlich erst mit der Beobachtung der Superpartner bestimmt werden. In der Quantenmechanik liefert die Anwendung supersymmetrischer Techniken allerdings neue Einblicke in Zusammenhänge zwischen Potentialen und mächtige Werkzeuge welche ein Studium unabhängig von der supersymmetrischen Feldtheorie lohnenswert machen.

2 SUSY Quantenmechanik

Gewöhnlich werden Bosonen und Fermionen über ihren Spin charakterisiert. In der SUSY-Quantenmechanik entscheiden allerdings die Vertauschungsrelationen der Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren darüber ob es sich um einen „bosonischen“ oder „fermionischen“ Zustand handelt.

2.1 Vielteilchensysteme

Der Zustand eines Vielteilchensystems kann durch die Besetzungszahlen der zugrundeliegenden Einteilchen-Zustände vollständig bestimmt werden.

$$|\Psi\rangle = |n_1,..,n_k\rangle$$

Dazu lassen sich für jeden Einteilchen-Zustand $|\psi_i\rangle$ die Erzeugung- und Vernichtungsoperatoren $\hat{a}_i^+$ und $\hat{a}_i^-$ einführen, welche so definiert sind, dass sie ein Teilchen dem Zustand hinzufügen, oder aus dem Zustand entfernen. Außerdem gibt es die Besetzungszahloperatoren $\hat{n}_i$.

Bosonen Handelt es sich bei den Teilchen um Bosonen, so genügen die Operatoren den folgenden Eigenwertgleichungen:

$$\begin{aligned}
\hat{b}_i^- |n_1,..,n_i,..\rangle &= \sqrt{n_i}\, |n_1,..,n_i - 1,..\rangle \\
\hat{b}_i^+ |n_1,..,n_i,..\rangle &= \sqrt{n_i + 1}\, |n_1,..,n_i + 1,..\rangle \\
\hat{n}_i |n_1,..,n_i,..\rangle &= \hat{b}_i^+ \hat{b}_i^- |n_1,..,n_i,..\rangle = n_i\, |n_1,..,n_i,..\rangle
\end{aligned}$$

Durch einsetzen gewinnt man die Kommutatorrelationen

$$\left[\hat{b}_i^- \,, \hat{b}_{i'}^+\right] = \delta_{i,i'}$$

und

$$\left[\hat{b}_i^- \,, \hat{b}_{i'}^-\right] = \left[\hat{b}_i^+ \,, \hat{b}_{i'}^+\right] = 0.$$

Fermionen Fermionen haben nach dem Pauliprinzip die Eigenschaft, dass zwei ununterscheidbare Teilchen nicht den selben Zustand einnehmen dürfen. Das Eigenwertspektrum des Besetzungszahloperators $\hat{n}_i$ reduziert sich also auf 0 und 1. Die Eigenwertgleichungen der Erzeuger und Vernichter sind ansonsten identisch zu denen der Bosonen:

$$\hat{f}_i^- \left| n_1,..,1,.. \right\rangle = \left| n_1,..,0,.. \right\rangle \qquad \hat{f}_i^+ \left| n_1,..,0,.. \right\rangle = \left| n_1,..,1,.. \right\rangle$$

$$\hat{n}_i \left| n_1,..,n_i,.. \right\rangle = \hat{f}_i^+ \hat{f}_i^- \left| n_1,..,n_i,.. \right\rangle = n_i \left| n_1,..,n_i,.. \right\rangle$$

Aus dem Pauliprinzip folgt die sogenannte „Nilpotenz“ der Erzeuger und Vernichter,

$$\hat{f}_i^{-2} = \hat{f}_i^{+2} = 0.$$

Durch einsetzen lassen sich außerdem die Antikommutatoren[1]

$$\Rightarrow \left\{\hat{f}_i^- \,, \hat{f}_{i'}^+\right\} = \delta_{i,i'}$$

und

$$\left\{\hat{f}_i^- \,, \hat{f}_{i'}^-\right\} = \left\{\hat{f}_i^+ \,, \hat{f}_{i'}^+\right\} = 0$$

bestätigen. Diese sind vollkommen analog den Kommutatorrelationen der bosonischen Operatoren.

Zustände mit Bosonen und Fermionen Betrachten wir ein System in dem sowohl fermionen, als auch bosonen auftreten, so ist noch zu beachten, dass die bosonischen und fermionischen Operatoren, $\hat{b}_i$ und $\hat{f}_i$, miteinander kommutieren, da sie auf unterschiedliche Räume wirken.

[1] Antikommutator $\left\{\hat{a} \,, \hat{b}\right\} = \hat{a}\hat{b} + \hat{b}\hat{a}$

2.2 Die SUSY-Transformation

Um ein einfaches, supersymmetrisches Modell zu erhalten, können wir einen Produktzustand $|n_b\, n_f\rangle = |n_b\rangle\, |n_f\rangle$ aus einem bosonischen und einem fermionischen Zustand betrachten. Die Zustände eines solchen Systems bezeichnet man als bosonisch für $n_f = 0$ und fermionisch für $n_f = 1$. Wir suchen nun Operatoren

$$\hat{Q}_+ \, |n_b n_f\rangle \propto |n_b - 1{,}n_f + 1\rangle$$

und

$$\hat{Q}_- \, |n_b n_f\rangle \propto |n_b + 1{,}n_f - 1\rangle \,,$$

welche Teilchen zwischen den Zuständen austauschen. Der einfachste Ansatz ergibt sich direkt aus den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren:

$$\hat{Q}_+ = \hat{b}^- \hat{f}^+ \tag{1}$$

$$\hat{Q}_- = \hat{b}^+ \hat{f}^- \tag{2}$$

Wir werden $\hat{Q}_+$ und $\hat{Q}_-$ im folgenden als SUSY-Operatoren bezeichnen. Supersymmetrie bedeutet nun, dass diese Operatoren mit dem Hamiltonoperator kommutieren, dass also gilt

$$\left[\hat{H}\,,\hat{Q}_+\right] = \left[\hat{H}\,,\hat{Q}_-\right] = 0. \tag{3}$$

Die Operatoren $\hat{Q}_+$ und $\hat{Q}_-$ „erben" die Nilpotenz von $\hat{f}^+$ und $\hat{f}^-$, so dass der einfache Ansatz

$$\hat{H}_S = \left\{\hat{Q}_+\,,\hat{Q}_-\right\} \tag{4}$$

diese Bedingung erfüllt. Statt $\hat{Q}_+$ und $\hat{Q}_-$ können wir auch die Operatoren

$$\hat{Q}_1 = \hat{Q}_+ + \hat{Q}_- \tag{5}$$

und

$$\hat{Q}_2 = i\left(\hat{Q}_- - \hat{Q}_+\right) \tag{6}$$

einführen. Es lässt sich leicht zeigen dass auch diese mit dem Hamiltonoperator (4) kommutieren. Darüber hinaus besitzen sie den Vorteil der hemitizität und dass zweimalige Anwendung einen Zustand wieder in sich selbst überführt:

$$\hat{Q}_1\,|n_b{,}0\rangle \propto |n_b - 1{,}1\rangle \qquad \hat{Q}_1\,|n_b{,}1\rangle \propto |n_b + 1{,}0\rangle$$

Wir bezeichnen sie im folgenden als SUSY-Transformationen. Es gilt zwischen ihnen die Antikommutatorrelation

$$\left\{\hat{Q}_1\,,\hat{Q}_2\right\} = 0. \tag{7}$$

Der Hamiltonoperator H_S lässt sich auch ausdrücken als

$$\hat{H}_S = \left\{ \hat{Q}_+ \,, \hat{Q}_- \right\} = \hat{Q}_1^2 = \hat{Q}_2^2. \tag{8}$$

2.3 Der harmonische Oszillator

Ein wohl bekanntes Beispiel, für einen bosonischen Zustand, stellt der harmonische Oszillator dar. Der Hamiltonoperator lässt sich durch Auf- und Absteigeoperatoren ausdrücken:

$$\hat{H}_b = \hbar\omega \left(\hat{b}^+ \hat{b}^- + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right)$$

Mit dem Orts- und Impulsoperator gilt

$$\hat{b}^\pm = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{q} \mp \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} \left(\sqrt{m}\omega \hat{q} \mp \frac{i\hat{p}}{\sqrt{m}} \right).$$

Außerdem gelten die Kommutatorrelationen

$$\left[\hat{b^-} \,, \hat{b}^+ \right] = 1$$

und

$$\left[\hat{b}^- \,, \hat{b}^- \right] = \left[\hat{b}^+ \,, \hat{b}^+ \right] = 0.$$

Diese entsprechen offensichtlich denjenigen der bosonischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren. Wir können den harmonischen Oszillator folglich als einen bosonischen Zustand auffassen, der mit n Bosonen besetzt gerade die Energie

$$E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$$

aufweist. Es liegt nun die Frage nahe, ob sich ein fermionisches Analogon konstruieren lässt.

2.4 Der fermionische Oszillator

Analog zum harmonischen Oszillator, drücken wir zunächst den fermionischen Erzeuger und Vernichter durch, zunächst nicht weiter bestimmte, fermionische Orts- und Impulsoperatoren aus:

$$\hat{f}^\pm = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\psi \mp i\pi \right) \tag{9}$$

Umgekehrt lassen sich auch die fermionischen Orts- und Impulsoperatoren durch die Erzeuger und Vernichter ausdrücken:

$$\hat{\psi} = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}\left(\hat{f}^{+} + \hat{f}^{-}\right) \qquad \hat{\pi} = i\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\left(\hat{f}^{+} - \hat{f}^{-}\right) \tag{10}$$

Daraus folgt die Antikommutatorrelation

$$\begin{aligned}
\left\{\hat{\psi}\,,\hat{\pi}\right\} &= \hat{\psi}\hat{\pi} + \hat{\pi}\hat{\psi} \\
&= i\frac{\hbar}{2}\left(\hat{f}^{+2} - \hat{f}^{+}\hat{f}^{-} + \hat{f}^{-}\hat{f}^{+} - \hat{f}^{-2} + \hat{f}^{+2} + \hat{f}^{+}\hat{f}^{-} - \hat{f}^{-}\hat{f}^{+} - \hat{f}^{-2}\right) \\
&= i\hbar\left(\hat{f}^{+2} - \hat{f}^{-2}\right) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Analog ergibt sich

$$\left\{\hat{\psi}\,,\hat{\psi}\right\} = \{\hat{\pi}\,,\hat{\pi}\} = \hbar.$$

Es wird sich gleich zeigen, dass es Zweckmäßig ist den einfachen Ansatz

$$\hat{H}_f = i\omega\hat{\psi}\hat{\pi} \tag{12}$$

für den Hamiltonoperator zu wählen. Durch Einsetzen und Anwenden der Antikommutatoren folgt

$$\begin{aligned}
\hat{H}_f &= i\omega\hat{\psi}\hat{\pi} \\
&= -\frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{f}^{+} + \hat{f}^{-}\right)\left(\hat{f}^{+} - \hat{f}^{-}\right) \\
&= -\frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{f}^{+2} - \hat{f}^{-2} + \hat{f}^{-}\hat{f}^{+} - \hat{f}^{+}\hat{f}^{-}\right) \\
&= \frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{f}^{+}\hat{f}^{-} - \hat{f}^{-}\hat{f}^{+}\right) \\
&= \hbar\omega\left(\hat{f}^{+}\hat{f}^{-} - \frac{1}{2}\right).
\end{aligned} \tag{13}$$

Dieser Ausdruck entspricht bis auf das Vorzeichen der Grundzustandsenergie dem Hamiltonoperator des harmonischen Oszillators. Der fermionische Oszillator beschreibt ein Zweizustandssystem mit den Energien $+\hbar\omega$ und $-\hbar\omega$, wie es zum Beispiel vom Zeeman-Effekt bekannt ist.

2.5 Der SUSY-Oszillator

Unser einfachster Ansatz für einen supersymmetrischen Hamiltonoperator lautete

$$\hat{H}_S = \hat{Q}_1^2 = \left(\hat{Q}_+ + \hat{Q}_-\right)^2 = \hat{Q}_+\hat{Q}_- + \hat{Q}_-\hat{Q}_+.$$

Wir entscheiden uns nun für einen Vorfaktor der SUSY-Operatoren

$$\hat{Q}_+ = \sqrt{\hbar\omega}\hat{b}^-\hat{f}^+$$

und

$$\hat{Q}_- = \sqrt{\hbar\omega}\hat{b}^+\hat{f}^-.$$

Durch einsetzen in (14) ergibt sich

$$\begin{aligned} \hat{H}_S &= \hbar\omega\left(\hat{b}^-\hat{b}^+\hat{f}^+\hat{f}^- + \hat{b}^+\hat{b}^-\hat{f}^-\hat{f}^+\right) \\ &= \hbar\omega\left[\left(1+\hat{b}^+\hat{b}^-\right)\hat{f}^+\hat{f}^- + \hat{b}^+\hat{b}^-\left(1-\hat{f}^+\hat{f}^-\right)\right] \\ &= \hbar\omega\left(\hat{b}^+\hat{b}^- + \hat{f}^+\hat{f}^-\right) \\ &= \hat{H}_b + \hat{H}_f = \hbar\omega\left(n_b + n_f\right). \end{aligned} \tag{14}$$

Indem wir den einfachsten Ansatz für unser supersymmetrisches System gewählt haben, gelangen wir offensichtlich direkt auf einen supersymmetrischen Oszillator, dessen Hamiltonoperator sich aus der Summe des bosonischen und fermionischen Oszillators bildet. Die Grundzustandsenergie dieses SUSY-Oszillators ist Null. Analog führt die Supersymmetrie in der Feldtheorie zum Verschwinden einiger Divergenzen, welche durch endliche Nullpunktsenergien hervorgerufen werden. Die Energieniveaus des SUSY-Oszillators sind in Abbildung 1 dargestellt. Der Grundzustand besitzt die Energie $E = 0$, ist boso-

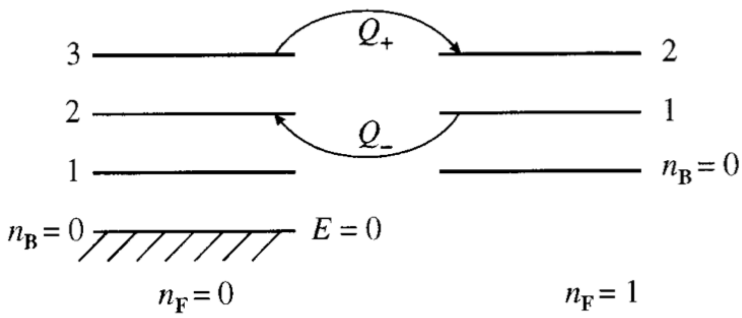

Abbildung 1: Die niedrigsten Energieniveaus des SUSY-Oszillators. Kalka, Soff - *Supersymmetrie*, Teubner 1997

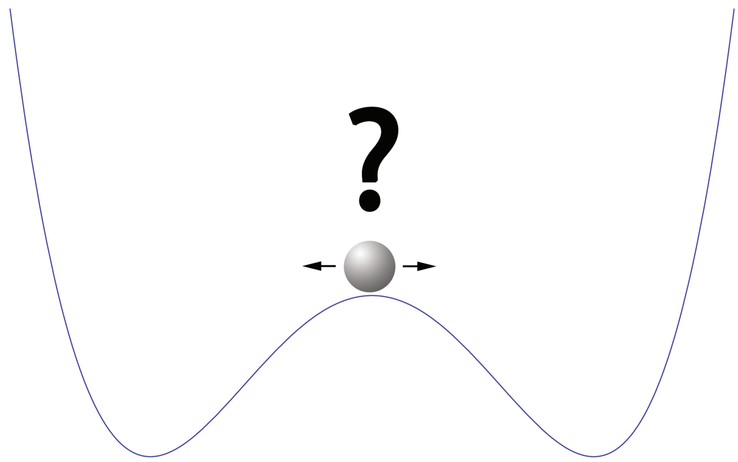

Abbildung 2: Doppelmuldenpotential zur Illustration der spontanen Symmetriebrechung.

nisch und nicht entartet. Alle Anderen Energieniveaus sind zweifach entartet. Allgemein folgt aus der SUSY-Algebra, also den Kommutator- und Antikommutatorrelationen des supersymmetrischen Systems, dass alle Zustände mit einer Energie $E > 0$ zweifach entartet sind und der Grundzustand, sofern er bei $E = 0$ liegt, keine Entartung aufweist.

2.6 Exakte und Gebrochene Symmetrie

Unter Spontan gebrochener Symmetrie versteht man, dass der Hamiltonoperator eines Systems invariant unter einer Transformation ist, der Grundzustand hingegen nicht. Dies lässt sich an einem Beispiel der klassischen Mechanik veranschaulichen. Befindet sich eine Kugel in einem symmetrischen Doppelmuldenpotential (siehe Abbildung 2), so ist die Hamiltonfunktion des Systems ebenfalls Spiegelsymmetrisch. Langfristig strebt die Kugel jedoch einen Punkt niedrigster Energie an. Da zwei Grundzustände existieren, muss sich die Kugel schlussendlich für eine der Mulden entscheiden und befindet sich dann entweder rechts oder links. Genauso streben quantenmechanische Systeme den Grundzustand an und es kommt zur spontanen Symmetriebrechung. Die Symmetrie ist in einem supersymmetrischen System folglich gebrochen, wenn der Grundzustand entartet ist. Dies ist genau dann der Fall wenn dieser eine Energie $E > 0$ besitzt.

3 Nichtlineare SUSY

Bisher haben wir ein SUSY-Modell ohne Wechselwirkung zwischen bosonischem und fermionischem Sektor betrachtet. Die Überlegungen lassen sich nun leicht auf nichtlineare Modelle erweitern. Wir wählen zunächst wieder den einfachsten Ansatz und verallgemeinern die Abhängigkeit der SUSY-Operatoren von den bosonischen Erzeugern und Vernichtern,

$$\hat{Q}_+ = \hat{B}^- \hat{f}^+ \tag{15}$$

und

$$\hat{Q}_- = \hat{B}^+ \hat{f}^- \tag{16}$$

mit

$$\hat{B}^- \left(\hat{b}^+, \hat{b}^-\right) \quad \text{und} \quad \hat{B}^+ \left(\hat{b}^+, \hat{b}^-\right).$$

Dies führt auf den Hamiltonoperator

$$\hat{H}_S = \left\{\hat{Q}_+ , \hat{Q}_-\right\} = \hat{B}^- \hat{B}^+ \hat{f}^+ \hat{f}^- + \hat{B}^+ \hat{B}^- \hat{f}^- \hat{f}^+. \tag{17}$$

Aus der Forderung, dass dieser hermitesch sein soll, ergibt sich außerdem dass $\hat{B}^-$ und $\hat{B}^+$ zueinander adjungiert sein müssen:

$$\hat{B}^{-\dagger} = \hat{B}^+ \tag{18}$$

Der bosonische Teilchenzahloperator $\hat{n}_b$ kommutiert jetzt allerdings nicht mehr mit $\hat{H}_S$. Wir charakterisieren Zustände deswegen durch die Energie E und die Fermionenzahl n_f.

3.1 Kanonische Darstellung

Da das Eigenwertspektrum des Fermionenzahloperators $\hat{n}_f$ sich, wie schon erwähnt, auf die Werte 0 und 1 beschränkt, liegt es nahe, die Zustände mit der Energie E in einen Vektor

$$|E, n_f\rangle \Rightarrow \begin{pmatrix} |E_0\rangle \\ |E_1\rangle \end{pmatrix} \tag{19}$$

zusammenzufassen. Dieses Vorgehen ist von den Spinoren bekannt. Die fermionischen Erzeuger und Vernichter gehen dann über, in die einfache Matrixform

$$\hat{f}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{f}^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Damit folgt für die SUSY-Transformationen

$$\hat{Q}_1 = \hat{B}^+ \hat{f}^- + \hat{B}^- \hat{f}^+ = \begin{pmatrix} 0 & \hat{B}^+ \\ \hat{B}^- & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{Q}_2 = \begin{pmatrix} 0 & i\hat{B}^+ \\ -i\hat{B}^- & 0 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Der Hamiltonoperator ist Diagonal und besitzt die Form

$$\hat{H}_S = \hat{B}^- \hat{B}^+ \hat{f}^+ \hat{f}^- + \hat{B}^+ \hat{B}^- \hat{f}^- \hat{f}^+ \Rightarrow \begin{pmatrix} \hat{B}^+ \hat{B}^- & 0 \\ 0 & \hat{B}^- \hat{B}^+ \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Mit der Einheitsmatrix $\mathbb{1}$ und der dritten Paulimatrix σ^3 ist außerdem die äquivalente Darstellung

$$\hat{H}_S = \frac{1}{2} \left\{ \hat{B}^- , \hat{B}^+ \right\} \mathbb{1} - \frac{1}{2} \left[\hat{B}^- , \hat{B}^+ \right] \sigma^3 \tag{23}$$

zweckmäßig.

3.2 Das Superpotential

Einen Ansatz für die Operatoren $\hat{B}^-$ und $\hat{B}^+$ erhält man aus den Auf- und Absteigeoperatoren des harmonischen Oszillators, indem man den Ortsoperator $\hat{q}$ durch eine allgemeine Funktion $\hat{W}(\hat{q})$ ersetzt:

$$\hat{B}^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\hat{W}(\hat{q}) \mp \frac{i\hat{p}}{\sqrt{m}} \right] \tag{24}$$

Eine Verallgemeinerung der Impulsabhängigkeit würde die bekannte Form der kinetischen Energie im Hamiltonoperator zerstören. Die Funktion $\hat{W}(\hat{q})$ bezeichnet man als Superpotential. Durch Einsetzen in 23 erhält man den wesentlichen Hamiltonoperator der SUSY-Quantenmechanik,

$$H_S = \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{p}^2}{m} + \hat{W}^2 \right) \mathbb{1} - \frac{\hbar}{\sqrt{m}} \frac{dW}{dq} \frac{\sigma^3}{2}. \tag{25}$$

3.3 Superpotential und Grundzustand

Der Hamiltonoperator $\hat{H}_S$ zerfällt in der kanonischen Darstellung in zwei Hamiltonoperatoren $\hat{H}_1$ und $\hat{H}_2$:

$$\hat{H}_S = \begin{pmatrix} \hat{B}^+ \hat{B}^- & 0 \\ 0 & \hat{B}^- \hat{B}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{H}_1 & 0 \\ 0 & \hat{H}_2 \end{pmatrix}$$

Für einen Grundzustand von $\hat{H}_S$ **bei E=0** muss dabei gelten,

$$\hat{H}_1 \left| 0\, 0 \right\rangle = 0 \quad \text{und} \quad \hat{H}_2 \left| 0\, 1 \right\rangle = 0.$$

Es lässt sich zeigen, dass diese beiden Gleichungen äquivalent sind zu Differentialgleichungen ersten Grades:

$$\hat{H}_1 |0\,0\rangle = \hat{B}^+\hat{B}^- |0\,0\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{B}^- |0\,0\rangle = 0 \tag{26}$$

$$\hat{H}_2 |0\,1\rangle = \hat{B}^-\hat{B}^+ |0\,1\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{B}^+ |0\,1\rangle = 0 \tag{27}$$

Der Beweis von rechts nach links ist trivial, für den Beweis in umgekehrter Richtung genügt es festzustellen, dass gilt

$$\langle 0\,0| \hat{B}^+\hat{B}^- |0\,0\rangle = \int \langle 0\,0| \left(\hat{B}^-\right)^\dagger |x\rangle \langle x| \hat{B}^- |0\,0\rangle = \int \left|\langle x| \hat{B}^- |0\,0\rangle\right|^2.$$

Durch das Einsetzen der Operatoren aus (24) ergeben sich die Differentialgleichungen

$$\hat{B}^- |0\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\hat{W}(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{m}} \frac{\partial}{\partial x}\right] \psi_{00}(x) = 0 \tag{28}$$

und

$$\hat{B}^+ |0\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\hat{W}(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{m}} \frac{\partial}{\partial x}\right] \psi_{01}(x) = 0. \tag{29}$$

Diese lassen sich elementar integrieren. Das führt auf die Grundzustandswellenfunktionen

$$\left.\begin{matrix} \psi_{00}(x) \\ \psi_{01}(x) \end{matrix}\right\} = C \exp\left[\mp \frac{\sqrt{m}}{\hbar} \int_0^x W(x')\,dx'\right].. \tag{30}$$

Damit diese normierbar sind, müssen sie zumindest an den Rändern verschwinden. Es gelten also die zusätzlichen Bedingungen

$$\lim_{x\to\pm\infty} \psi_{00} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\pm\infty} dx' W(x') = \pm\infty \tag{31}$$

und

$$\lim_{x\to\pm\infty} \psi_{01} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\pm\infty} dx' W(x') = \mp\infty. \tag{32}$$

Da sich diese offensichtlich gegenseitig ausschließen, ist gezeigt, dass, sofern ein Grundzustand bei E=0 existiert, dieser nicht entartet sein kann. Ist eine der Bedingungen allerdings erfüllt, so kann die Grundzustandswellenfunktion ohne weiteres aus dem Superpotential berechnet werden. Ob die Symmetrie spontan gebrochen ist, hängt demnach außerdem *nur* vom Grenzwertverhalten des Superpotentials ab. Dies ist in Abbildung 3 schematisch dargestellt. Interessanterweise ist auch der Umgekehrte Weg möglich und, bei bekanntem,

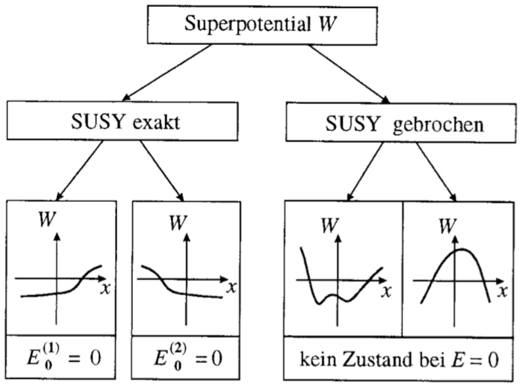

Abbildung 3: Abhängigkeit der Symmetriebrechung vom globalen Verlauf des Superpotentials. Kalka, Soff - *Supersymmetrie*, Teubner 1997

nicht entartetem Grundzustand, kann das Superpotential aus der Grundzustandswellenfunktion berechnet werden. Dazu genügt es die Gleichungen (28) und (29) umzuformen, so dass folgt

$$W\left(x\right) = -\hbar\sqrt{\frac{2}{m}}\frac{\psi_{00}'\left(x\right)}{\psi_{00}\left(x\right)} = -\hbar\sqrt{\frac{2}{m}}\frac{\partial}{\partial x}\ln\psi_{00} \tag{33}$$

bzw.

$$W\left(x\right) = \hbar\sqrt{\frac{2}{m}}\frac{\psi_{01}'\left(x\right)}{\psi_{01}\left(x\right)} = \hbar\sqrt{\frac{2}{m}}\frac{\partial}{\partial x}\ln\psi_{01}. \tag{34}$$

3.4 Eigenwerte und -zustände von H_1 und H_2

Grundlegend für die supersymmetrische Quantenmechanik, sind die Zusammenhänge zwischen den beiden Komponenten des Hamiltonoperators $\hat{H}_S$, $\hat{H}_1$ und $\hat{H}_2$. Bei der Untersuchung bietet sich nun eine neue Schreibweise der Zustände an, wobei $\psi_n^{(i)}$ die n-te Energieeigenfunktion von $\hat{H}_i$ darstellt. Es gelten dann die Eigenwertgleichungen

$$\hat{H}_1\psi_n^{(1)} = \hat{B}^+\hat{B}^-\psi_n^{(1)} = E_n^{(1)}\psi_n^{(1)} \tag{35}$$

und

$$\hat{H}_2\psi_n^{(2)} = \hat{B}^-\hat{B}^+\psi_n^{(2)} = E_n^{(2)}\psi_n^{(2)}. \tag{36}$$

Es zeigt sich nun, dass die bosonischen Operatoren $\hat{B}^+$ und $\hat{B}^-$ die Eigenzustände von $\hat{H}_1$ und $\hat{H}_2$ ineinander Überführen:

$$\hat{H}_1\hat{B}^+\psi_n^{(2)} = \hat{B}^+\hat{B}^-\hat{B}^+\psi_n^{(2)} = E_n^{(2)}\hat{B}^+\psi_n^{(2)} \tag{37}$$

$$\hat{H}_2\hat{B}^-\psi_n^{(1)} = \hat{B}^-\hat{B}^+\hat{B}^-\psi_n^{(1)} = E_n^{(1)}\hat{B}^+\psi_n^{(1)} \tag{38}$$

Da dies für alle Zustände gilt besitzen sie außerdem ein identisches Eigenwertspektrum. Aus dieser Feststellung lassen sich nun scheinbar unzusammenhängende Potentiale miteinander in Verbindung bringen, indem wir aus einem bekannten Grundzustand das Superpotential berechnen und daraus wiederum das zu $\hat{H}_2$ gehörige Partnerpotential.

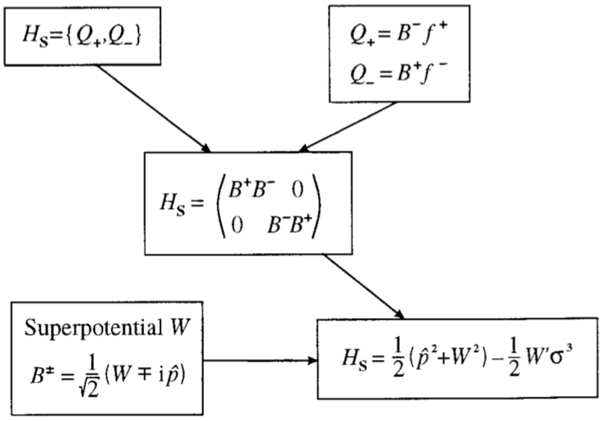

Abbildung 4: Kalka, Soff - *Supersymmetrie*, Teubner 1997

4 Literatur

- H. Kalka, G. Soff - *Supersymmetrie*, Teubner (1997)
- H. Nicolai - *Supersymmetrische Quantenmechanik*, Phys. Bl. 47 (1991)
- F. Schwabl - *Quantenmechanik*, Springer (2002), Kapitel 19