Seminar zur Theorie der Atome, Kerne und kondensierten Materie

Gequetschte Zustände beim harmonischen Oszillator

Melanie Kämmerer

16. Oktober 2011

1 Wiederholung

Die Wellenfunktion eines kohärenten Zustandes ist ein Gauß'sches Wellenpakete:

$$\Psi(x) = \left(\frac{\kappa^2}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{1}{2}(\kappa x - \sqrt{2}\alpha)^2\right]$$

mit $\kappa = \sqrt{M\Omega/\hbar}$.

Die Erwartungswerte des Orts- und Impuls-Operators kohärenter Zustände oszillieren mit kosinus bzw. sinusförmig. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit $|\Psi(x)|^2$ verhält sich also wie bei einem klassischen Teilchen; sie oszilliert. Diese Zustände haben ein minimales Unschärfeprodukt von $\Delta x \Delta p = \hbar/2$. Auf Grund all dieser Eigenschaften, sind die kohärenten Zustände diejenigen in der Quantenmechanik, die den klassischen am ähnlichsten sind.

2 Unschärferelationen

Die Heisenbergsche Unschärferelation für Orts- und Impulsoperator x und p

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

wurde 1927 von Werner Heisenberg gefunden. Kurze Zeit später wurde auch die allgemeine Unschärferelation entdeckt. Sie lautet für zwei Observablen A und B:

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{|\langle [A,B] \rangle|}{2}.$$

Führt man nun die dimensionslosen Koordinaten X_1 und X_2 wie folgt ein:

$$X_1 = \frac{1}{2}(a + a^\dagger) = \frac{x\kappa}{\sqrt{2}} \quad \text{mit} \quad \kappa = \sqrt{\frac{M\Omega}{\hbar}}$$

$$X_2 = \frac{1}{2i}(a - a^\dagger) = \frac{p}{\sqrt{2}\kappa\hbar},$$

(dabei sind a und $a^\dagger$ der Vernichter und der Erzeuger des harmonischen Oszillators), so erhält man als Unschärfeprodukt $\Delta X_1 \Delta X_2 \geq \frac{1}{4}$.

3 Gequetschte Zustände

Betrachtet man den Vakuumzustand (oder Grundzustand genannt) in den neuen Koordinaten:

$$u_0(X_1) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left(\frac{-X_1^2}{2}\right)$$

$$\langle X_1 \rangle = 0 \;\; \langle X_2 \rangle = 0$$

$$\text{Unschärfeprodukt } \Delta X_1 \Delta X_2 = \frac{1}{4}, \;\; \Delta X_1 = \Delta X_2 = \frac{1}{2}$$

stellt man fest, dass die Unschärfen für X_1 und X_2 gleich sind. Dies äußert sich im Phasenraum als Kreis (Abb. 1, links). Die Idee des Quetschen ist nun, dass man in diesem Fall eine Komponente, X_1 oder X_2 genauer als $\frac{1}{2}$ bestimmen möchte. Allgemeiner spricht man von einem gequetschten Zustand, wenn eine Komponente genauer bestimmbar ist als im Vakuumzustand. Dann sieht das Bild im Phasenraum "gequetscht" aus (Abb. 1, mitte/rechts).

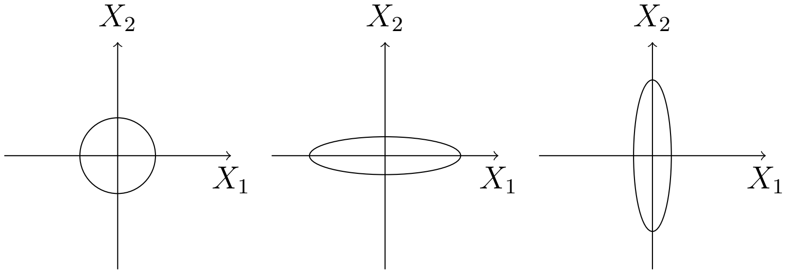

Abbildung 1: Phasenraumdarstellung eines kohärenten Vakuumzustandes (links), und zwei gequetschten kohärenten Vakuumzuständen (mitte, rechts).

Mathematisch kann man das Quetschen mit einem Quetschoperator S beschreiben:

$$S(s)\Psi(X_1) = s^{1/4}\Psi(\sqrt{s}X_1).$$

Damit sieht ein gequetscher Vakuumzustand wie folgt aus:

$$\Psi_0(X_1) = \left(\frac{s}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{sX_1^2}{2}\right).$$

Betrachtet man einen Zustand in einheitenbehafteten Koordinaten, dann entspricht das Quetschen einer instantanen Frequenzänderung.

Die Unsicherheiten eines gequetschten Vakuumzustands sind um den Faktor $\sqrt{s}$ gestreckt bzw. gestaucht, wie man hier sieht:

$$\Delta X_1 = \frac{1}{2\sqrt{s}},\ \Delta X_2 = \frac{\sqrt{s}}{2};\quad \Delta X_1 \Delta X_2 = \frac{1}{4}$$

Für $0 < s < 1$ ist die Unsicherheit von X_2 um $\sqrt{s}$ schmaler und die von X_1 um $1/\sqrt{s}$ breiter als im Grundzustand (siehe Abb. 1 mitte), für $s > 1$ umgekehrt (Abb. 1 rechts). Insgesamt erhält man weiterhin ein minimales Unschärfeprodukt! Auch bei der Wignerfunktion

$$W(X_1, X_2) = \frac{1}{\pi} \exp\left(-s\frac{X_1^2}{2} - \frac{1}{s}\frac{X_2^2}{2}\right)$$

lässt sich dieses Verhalten erkennen. Für $s = 1$ handelt es sich um eine isotrope Gaußglocke, für $s \neq 1$ ist die Gaußglocke in einer Richtung „gequetscht“ (Abb. 2,3).

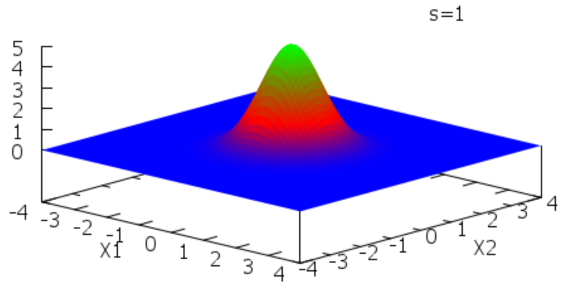

Abbildung 2: Wignerfunktion des Vakuumzustandes (s=1)

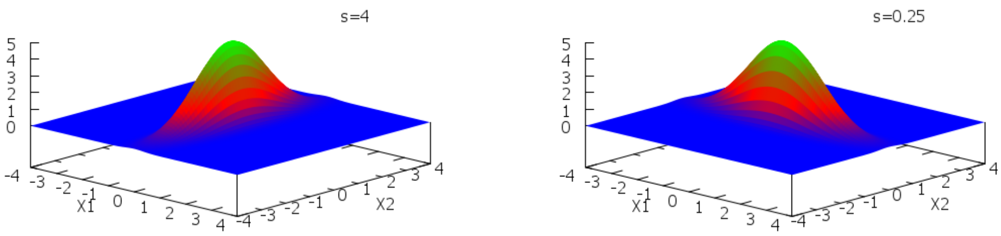

Abbildung 3: Wignerfunktion des gequetschten Vakuumzustandes s=4, s=0.25

4 Katzenzustände

4.1 Schrödingers Katze

Erwin Schrödinger hat folgendes Gedankenexperiment durchgeführt (Abb.4): Er hat eine Katze in einen abgeschlossenen Raum gesetzt, zusammen mit einem Gift, das die Katze töten kann. Das Gift sollte nur versprüht werden, wenn ein Mechanismus ausgelöst wird. Dieser Mechanismus sollte von einem radioaktiven Atom ausgelöst werden, wenn dies zerfällt. In diesem Gedankenexperiment ist Schrödinger davon ausgegangen, dass im optimalen Fall dieses eine Atom mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% innerhalb einer bestimmten Zeit, z.B. einer Stunde, zerfällt und mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% in dieser Zeit nicht zerfällt. Fragt man sich nun nach einer Stunde, ob die Katze noch lebt, so kann dies nicht beantwortet werden, ohne in den Raum zu schauen. Solange keiner nachschaut, ist die Katze also in einem Überlagerungszustand aus tot und lebendig. Die Wellenfunktion Ψ für die Katze lautet dann $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|tot\rangle + |lebendig\rangle$.
Damit erhält man die Dichtematrix:

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \frac{1}{2}(|tot\rangle\langle tot| + |tot\rangle\langle lebendig| + |lebendig\rangle\langle tot| + |lebendig\rangle\langle lebendig|).$$

Abbildung 4: Schrödingers Katze ist tot und lebendig, solange keiner nachschaut.[1]

4.2 Katzenzustände

In Anlehnung an dieses Experiment hat man die Superposition zweier kohärenter Zustände $|\alpha\rangle$ und $|-\alpha\rangle$ als Katzenzustände benannt, da es sich bei kohärenten Zuständen um quasi klassische Zustände handelt und eine Katze offensichtlich als ein klassisches Objekt anzusehen ist. Man definiert die Katzenzustände allgemein als:

$$|\Psi\rangle = N(|\alpha\rangle + e^{i\Phi}|-\alpha\rangle),$$

wobei N ein Normierungsfaktor ist. Für $\Phi = 0$ nennt man diesen Zustand auch geraden Katzenzustand.

$$\begin{aligned}|\Psi\rangle &= N_e(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)\\ N_e &= \frac{1}{\sqrt{2}}[1+\exp(-2\alpha^2)]^{-1/2}\end{aligned}$$

Betrachtet man hier wieder die Erwartungswerte und Schwankungen:

$$\begin{aligned}\langle X_1\rangle &= \langle X_2\rangle = 0\\ \Delta X_1^2 &= 0,25 + \frac{\alpha^2}{1+\exp(-2\alpha^2)}\\ \Delta X_2^2 &= 0,25 - \frac{\alpha^2\exp(-2\alpha^2)}{1+\exp(-2\alpha^2),}\end{aligned}$$

so kann man erkennen, dass bei X_2 für kleine α quetschen auftreten kann, für große α jedoch nicht mehr (siehe Abb. 5).

⇒ **Man kann durch Superposition von kohärenten Zuständen gequetschte Zustände erzeugen.**

Dieses Verhalten kann auch in Abbildung 6 betrachtet werden; dort sieht man die Wahrscheinlichkeitsdichte für einige kohärente Zustände α. Man erkennt deutlich, dass für kleine α ($0<\alpha<1$) die Verteilung eine geringere Breite hat als für große α.

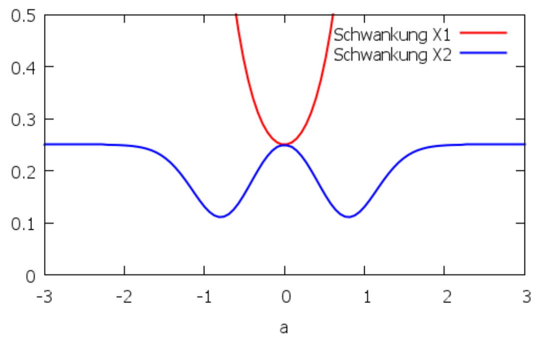

Abbildung 5: Schwankungen des geraden Katzenzustandes

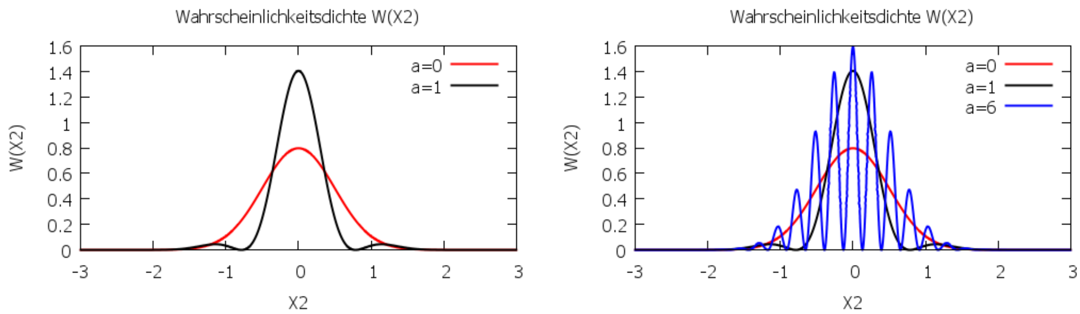

Abbildung 6: Wahrscheinlichkeitsdichte $W(X_2)$ des geraden Katzenzustandes für verschiedene α

Die Wignerfunktion für den geraden Katzenzustand sieht aus wie folgt:

$$W_e(X_1, X_2) = \frac{1}{\pi[1 + \exp(-2\alpha^2)]}\{\exp[-2(X_1 - \alpha)^2 - 2X_2^2]$$
$$+ \exp[-2(X_1 + \alpha)^2 - 2X_2^2] + 2\exp[-2X_1^2 - 2X_2^2]\cos(4\alpha X_2)\}$$

Man erkennt, dass es sich bei den ersten Summanden um zwei Gaußpeaks bei $\pm\alpha$ handelt. Der letzte Term ist ein Interferenzterm, der kosinusförmig oszilliert. In Abbildung 7 sieht man, dass zwischen den Gaußpeaks ein oszillierendes Interferenzmuster erscheint, dass auch negative Werte annimmt. Negative Werte in der Wigner-Funktion werden oft als rein quantenmechanisches Verhalten gedeutet.

[1]Quelle: http://m19s28.dyndns.org/iblech/klasse12/Physik/Bohmsche_Mechanik.pod.xhtml, 15.11.2011, 14:30h.

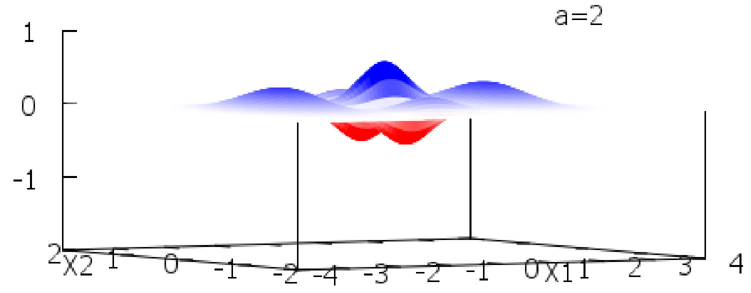

Abbildung 7: Wignerfunktion des geraden Katzenzustandes für α=2

5 Zusammenfassung

- Mit gequetschten Zuständen kann die Orts- oder Impulskomponente genauer als im Grundzustand bestimmt werden.
- Katzenzustände sind Superpositionen zweier kohärenter Zustände.
- Gewisse Katzenzustände zeigen nicht-klassisches Verhalten: Quetschen.

6 Literatur

- Gerry, Christopher; Knight, Peter: Introductory Quantum Optics, Cambridge: Cambridge University Press, 2006.
- Gerry, Christopher; Knight, Peter: Quantum superpositions and schrödinger cat states in quantum optics, American Journal of Physics 65 (10), Oktober 1997.
- Kuhn, Tilmann: Einführung in die Quantenoptik, Institut für Festkörpertheorie, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, SS10.
- Schleich, Wolfgang: Quantum Optics in Phase Space, Berlin:WILEY-VCH Verlag Berlin GmbH, 2001.