

Schriftliche Ausarbeitung zum Seminarvortrag

Chaos und Ordnung im „Bouncing Ball“-System

Christopher Hodde

21. Dezember 2011

Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Beschreibung der Systembewegung	3
3	Periodenverdopplung in der Logistischen Abbildung	5
3.1	Die Logistische Abbildung	5
3.2	Stabilität von Fixpunkten und periodischen Orbits	5
3.3	Stabilität der periodischen Orbits und Bifurkationsdiagramm der Logis- tischen Abbildung	6
3.4	Liapunov-Exponent	9
4	Langzeitverhalten des Bouncing-Ball-Systems	11
4.1	Grundgleichungen	11
4.2	Periode-1-Orbit	11
4.3	Bifurkationsdiagramm und Liapunov-Exponenten	12
4.4	Langzeitverhalten in Abhängigkeit der Anfangsbedingungen und Parameter	13

1 Einleitung

Das Prellball- oder „Bouncing Ball“-System ist ein zweidimensionales nichtlineares dynamisches System, das chaotisches Verhalten zeigen kann. Der Übergang in das Chaos verläuft auf dem Weg der Periodenverdopplungen, der analog in vielen dynamischen Systemen beobachtet werden kann.

Dieses Verhalten soll zunächst am Beispiel der logistischen Abbildung betrachtet werden. Anschließend werden anhand numerisch ermittelter Grafiken die Bewegungsformen des Bouncing Balls in Abhängigkeit der Anfangsbedingungen und Parameter des Systems untersucht.

2 Beschreibung der Systembewegung

Betrachtet wird ein als punktförmig angenommener Ball, der auf einer sinusförmig oszillierenden, geraden Platte instantane, teilweise elastische Stöße ausführt (Restitutionskoeffizient $0 < \epsilon < 1$). Die Masse der Platte ist dabei wesentlich größer als die des Balls. Im Verlauf der Zeit springt der Ball vertikal auf der oszillierenden Platte. Analytisch wird das Verhalten des Systems durch zwei gekoppelte iterierte Abbildungen beschrieben. Die Koordinaten sind:

θ_k : Die Phase der Tischozillation, zu der der k -te Aufprall des Balls stattfindet

v_k : Die Geschwindigkeit des Balls unmittelbar nach dem k -ten Aufprall

Dabei ist die Geschwindigkeitsabbildung explizit, die Phasenabbildung allerdings nur implizit gegeben.

In den sich langfristig einstellenden Bewegungen des Balls lassen sich vier grundlegende Fälle unterscheiden:

Der Ball kann stationär auf der Tischplatte liegen bleiben, wenn die Oszillation nicht stark genug ist, ihn in die Luft zu katapultieren.

Es existieren sogenannte „Sticking-Solutions“, (Abb. 2.1) in denen der Ball vom Tisch eingefangen wird und in einer bestimmten Phase der Tischozillation diesen wieder verlässt. Diese Lösungen sind periodisch und nicht invertierbar; eine Trajektorie kann zu verschiedenen Anfangsbedingungen gehören.

In Periode- n -Orbits (Abb. 2.2) führt der Ball n Sprünge durch, bevor die Bewegung sich wiederholt. In chaotischen Orbits (Abb. 2.3) wiederholt sich die Bewegung nicht.

Befindet sich der Ball in einem Periode- n -Orbit und die Frequenz der Tischozillation wird allmählich erhöht, kann man zu bestimmten Frequenzen eine Periodenverdopplung beobachten. Das Verhalten geht in einen Periode- $2n$ -Orbit über.

Solche Periodenverdopplungen treten in zahlreichen dynamischen Systemen auf. Besonders gut nachvollziehbar sind sie an der Logistischen Abbildung, die im Folgenden

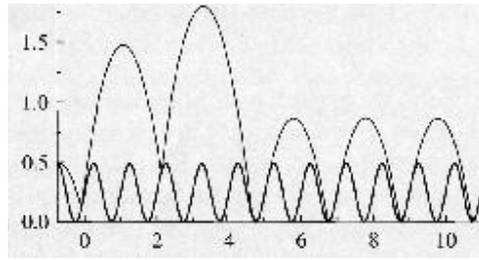


Abbildung 2.1: Sticking Solution. Ballposition (dünn) und Tischposition (fett) in Abhängigkeit der Zeit

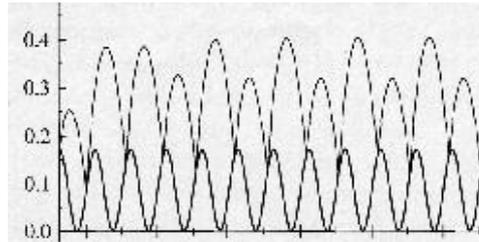


Abbildung 2.2: Periode-2-Lösung

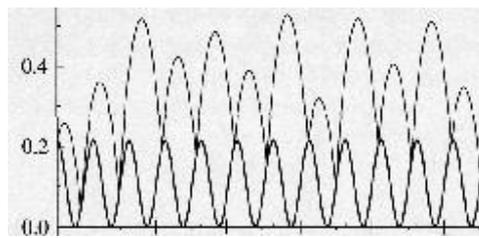


Abbildung 2.3: Chaotische Lösung

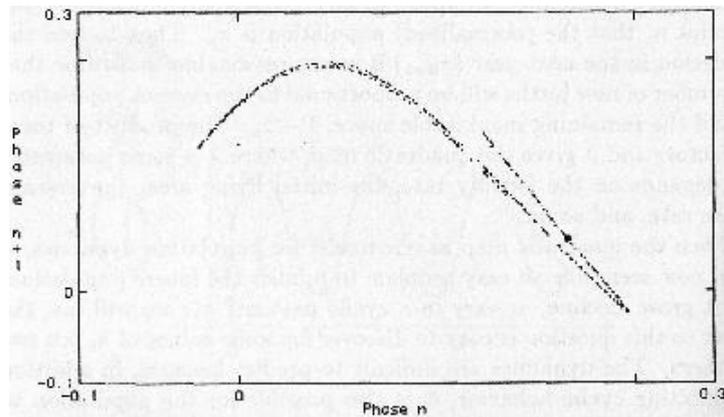


Abbildung 2.4: Aus einer Simulation ermittelte Phasenbeziehung $\theta_{k+1} - \theta_k$ des Bouncing Ball

vorgestellt werden soll. Motivieren lässt sich dies anhand der Phasenbeziehung $\theta_{k+1} - \theta_k$ (Abb. 2.4), die nur numerisch ermittelt werden kann. Sie hat wie die Logistische Abbildung die Form einer nach unten geöffneten Parabel (Abb. 3.1).

3 Periodenverdopplung in der Logistischen Abbildung

3.1 Die Logistische Abbildung

Die Logistische Abbildung stellt ein Modell für das Bevölkerungswachstum in einer Umgebung mit einer endlichen Kapazität dar. Durch die eindimensionale iterierte Abbildung mit einem Parameter r :

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n) \quad \text{für} \quad 0 \leq x_n \leq 1$$

wird aus der aktuellen Bevölkerung x_n die Bevölkerung im folgenden Jahr x_{n+1} ermittelt.

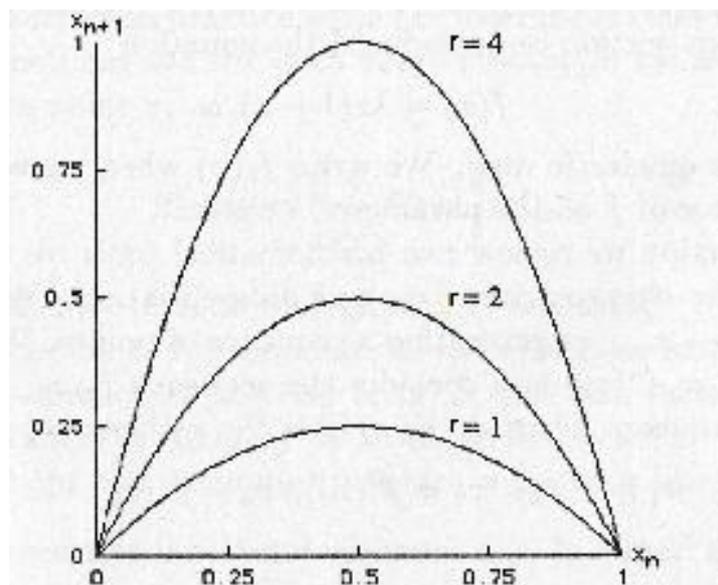


Abbildung 3.1: Logistische Abbildung für diverse r

3.2 Stabilität von Fixpunkten und periodischen Orbits

Ein Fixpunkt x^* einer eindimensionalen iterierten Abbildung wird durch die Forderung

$$x^* = x_n = x_{n+1} \quad \text{oder} \quad f(x^*) = x^*$$

definiert. Um die lokale Stabilität zu ermitteln, führen wir eine kleine Abweichung η vom Fixpunkt ein.

$$x_n = x^* + \eta_n$$

Die Funktion lässt sich linear entwickeln:

$$\begin{aligned} x^* + \eta_{n+1} = x_{n+1} &= f(x^* + \eta_n) = f(x^*) + f'(x^*)\eta_n + \dots \\ \eta_{n+1} &= f'(x^*)\eta_n + \dots \end{aligned}$$

Ist η_0 die Startabweichung, folgt für die Abweichung η_n nach n Iterationen:

$$\eta_n = (f'(x^*))^n \eta_0$$

Damit die Abweichung nach vielen Iterationen verschwindet, muss daher gelten.

$$|f'(x^*)| < 1 \tag{3.1}$$

In einem Periode- n -Orbit kehrt die Trajektorie nach n Iterationen wieder an den Ausgangspunkt zurück. Die n Punkte x_i^* , die auf dem Orbit liegen, sind daher Fixpunkte der n -ten Iterierten der Abbildung:

$$f^n(x_i^*) = x_i^* \quad \text{mit} \quad i = 1, \dots, n$$

Für ihre lokale Stabilität und die des gesamten periodischen Orbits gilt entsprechend unter Ausnutzung der Kettenregel:

$$\begin{aligned} |(f^n(x_i^*))'| &< 1 \\ |f'(x_1^*) \cdots f'(x_n^*)| &< 1 \end{aligned} \tag{3.2}$$

3.3 Stabilität der periodischen Orbits und Bifurkationsdiagramm der Logistischen Abbildung

Die Fixpunkte oder Periode-1-Orbits der Logistischen Abbildung lassen sich analytisch ermitteln:

$$\begin{aligned} x^* = f(x^*) &= rx^*(1 - x^*) \\ x^* = 0 \vee x^* &= 1 - \frac{1}{r} \end{aligned}$$

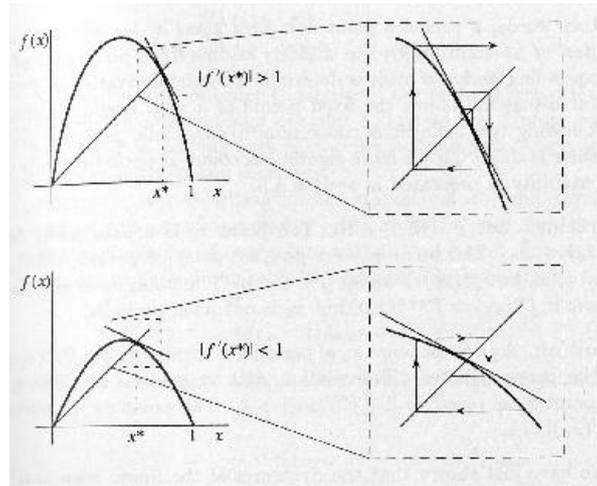


Abbildung 3.2: Lokale Stabilität eines Fixpunktes. Die Trajektorie spiralt je nach Betrag der Ableitung aus dem Fixpunkt heraus, bzw. in ihn hinein.

Für die Ableitung ergibt sich

$$f'(x^*) = r(1 - 2x^*),$$

Die Stabilitätsbedingung (3.1) liefert für die beiden Fixpunkte jeweils den Bereich ihrer Stabilität:

$f'(0) = r$	Stabil für	$0 < r < 1$
$f'\left(1 - \frac{1}{r}\right) = 2 - r$	Stabil für	$1 < r < 3$

Für den den Periode-2-Orbit muss die Gleichung

$$x^* = f^2(x^*) = r[rx^*(1 - x^*)](1 - [rx^*(1 - x^*)])$$

gelöst werden. Die Fixpunkte mit Periode 1 bleiben Lösungen und können abdividiert werden. Die verbleibende polynomielle Gleichung zweiter Ordnung hat die folgenden Lösungen:

$$x_{\pm}^* = \frac{1}{2r} \left(1 + r \pm \sqrt{(r-3)(r+1)} \right)$$

Das Stabilitätskriterium (3.2) lautet damit

$ -r^2 + 2r + 4 < 1$	Stabil für	$3 < r < \sqrt{6}$
-----------------------	------------	--------------------

In Abb. 3.3 sind die Parameterbereiche, für die die einzelnen Fixpunkte und Periode-2-Orbits stabil sind nocheinmal grafisch zusammengefasst. An der Stelle $r = 1$ wechseln

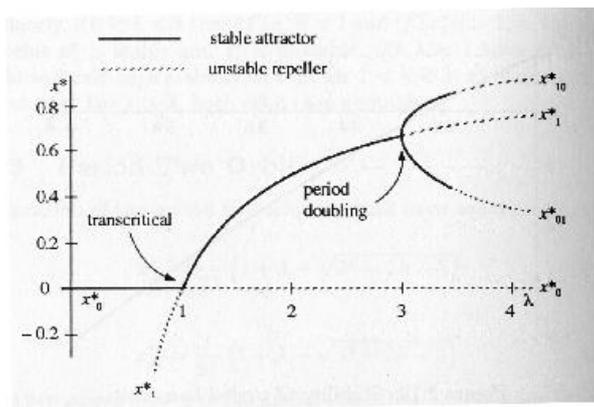


Abbildung 3.3: Erste Bifurkationen der Logistischen Abbildung

die Stabilitäten der beiden Periode-1-Fixpunkte in einer transkritischen Bifurkation. Bei $r = 3$ „entsteht“ ein Periode-2-Zyklus und der Fixpunkt wird instabil. Es findet eine Periodenverdopplung statt.

Für höhere Perioden werden die analytischen Berechnungen langwieriger. Die stabilen Fixpunkte des Systems lassen sich jedoch numerisch ermitteln und in einem Bifurkationsdiagramm (Abb 3.4) auftragen. Es sind weitere Periodenverdopplungen zu erkennen. Bis

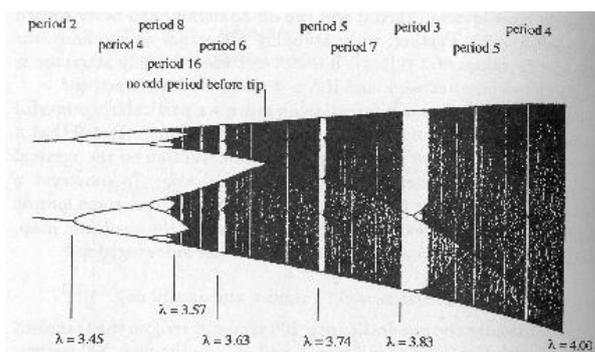


Abbildung 3.4: Numerisch ermitteltes Bifurkationsdiagramm der Logistischen Abbildung

zu einem Parameterwert von $r \approx 3.59$ finden unendlich viele Bifurkationen statt, wie sich durch genauere Analysen feststellen lässt. Die Bifurkationen rücken dabei immer dichter zusammen. Es findet sich für den Quotienten aufeinanderfolgender Abstände:

$$\delta := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} \approx 4.67$$

Dieser Wert wird Feigenbaum-Delta genannt. Es ist ein universeller Wert, der sich für die Periodenverdopplungen in allen unimodalen iterierten Abbildungen (Abbildungen mit einem quadratischen Maximum) ergibt. Bei höheren Parameterwerten $r > R_\infty$ ist das Verhalten chaotisch. Man findet jedoch sogenannte Periodische Fenster, die das Chaos

unterbrechen. Das größte ist das Periode-3-Fenster, das bei $r \approx 3.83$ beginnt. Darin ist wieder eine Bifurkationskaskade aus Periodenverdopplungen zu erkennen.

3.4 Liapunov-Exponent

Ein deterministisches System verhält sich chaotisch, wenn Trajektorien in einem abgeschlossenen Bereich ein aperiodisches Langzeitverhalten zeigen (sich nicht an Fixpunkte oder Grenzzyklen annähern) und die Entwicklung empfindlich von den Anfangsbedingungen abhängt. Das bedeutet, dass Trajektorien mit ähnlichen Anfangsbedingungen sich im Laufe der Zeit voneinander entfernen und somit eine langfristige Vorhersage des Systemverhaltens nicht möglich ist.

Ein quantitatives Maß für dieses Auseinanderlaufen der Trajektorien liefert der Liapunov-Exponent. Betrachten wir zwei Trajektorien, die an den Stellen x_0 und $x_0 + \delta_0$ starten und entwickelt sich der Abstand δ nach

$$|\delta_n| \propto |\delta_0|e^{n\lambda},$$

so bezeichnet λ den Liapunov-Exponenten. Ein positiver Exponent $\lambda > 0$ ist ein Indiz für chaotisches Verhalten.

Zur numerischen Berechnung wird die obige Definition logarithmiert:

$$\begin{aligned} \lambda &\propto \frac{1}{n} \ln \left| \frac{\delta_n}{\delta_0} \right| \\ &= \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^n(x_0 + \delta_0) - f^n(x_0)}{\delta_0} \right| \\ &= \frac{1}{n} \ln |(f^n)'(x_0)| && \text{mit der Kettenregel:} \\ &= \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i) \right| \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \\ \lambda &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \right) \end{aligned}$$

Auf diese Weise kann der Liapunov-Exponent bei der Iteration der Trajektorie „on the fly“ berechnet werden.

Bei der Berechnung des Liapunov-Exponenten eines Periode- p -Zyklus ergeben sich

immer wieder die selben p Summanden:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \right) \\ &= \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} \ln |f'(x_i)| \\ &= \frac{1}{p} \ln |(f^p)'(x^*)| \\ &< \frac{1}{p} \ln |1| = 0\end{aligned}$$

Damit ist sichergestellt, dass für einen Periode- p -Orbit $\lambda < 0$ gilt. An einer Periodenverdopplung ist gerade der Grenzfall $|(f^p)'(x^*)| = 1$ erreicht, sodass der Liapunov-Exponent dort verschwindet ($\lambda = 0$). In Abb. 3.5 werden diese Eigenschaften numerisch bestätigt. Man erkennt die Periodenverdopplungen, das chaotische Verhalten ab $r \approx 3.59$ und die periodischen Fenster.

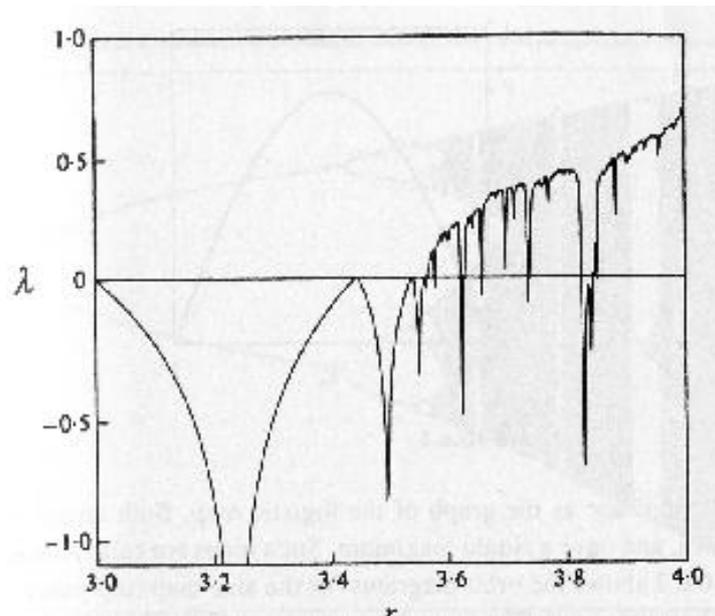


Abbildung 3.5: Liapunov-Exponent der Logistischen Abbildung in Abhängigkeit des Parameters r

4 Langzeitverhalten des Bouncing-Ball-Systems

4.1 Grundgleichungen

Die Grundgleichungen des Bouncing Ball Systems – eine implizite Gleichung für die Phase und eine explizite Gleichung für die Geschwindigkeit:

$$0 = A \sin \theta_k + v_k \left[\frac{1}{\omega} (\theta_{k+1} - \theta_k) \right] - \frac{1}{2} g \left[\frac{1}{\omega} (\theta_{k+1} - \theta_k) \right]^2 - A \sin \theta_{k+1}$$

$$v_{k+1} = (1 + \epsilon) \omega A \cos \theta_{k+1} - \epsilon \left\{ v_k - g \left[\frac{1}{\omega} (\theta_{k+1} - \theta_k) \right] \right\}$$

werden üblicherweise auf eine dimensionslose Form umgeschrieben. Diese ist zwar weniger anschaulich, die verschiedenen Bewegungen lassen sich aber einfacher miteinander vergleichen. Eine Möglichkeit der Parametrisierung verwendet:

die Zeitkoordinate	$\tau = \frac{\omega t + \delta_0}{2\pi}$
bzw. die Aufschlagphase	$\Phi = \tau \pmod{1},$
die Relativgeschwindigkeit	$W = \frac{\omega}{\pi g} (v - A \omega \cos(2\pi\tau)),$
die Antriebsstärke	$\Gamma = \frac{A \omega^2}{g}$
und die Höheneinheit	$[x] = \frac{2\pi g}{\omega^2}.$

In diesen Koordinaten schreiben sich die Grundgleichungen wie folgt:

$$0 = \frac{\Gamma}{2\pi^2} (\sin(2\pi\tau_k) - \sin(2\pi\tau_{k+1})) + \left[W_k + \frac{\Gamma}{\pi} \cos(2\pi\tau_k) \right] (\tau_{k+1} - \tau_k) - (\tau_{k+1} - \tau_k)^2$$

$$W_{k+1} = -\epsilon \left\{ W_k - 2(\tau_{k+1} - \tau_k) + \frac{\Gamma}{\pi} [\cos(2\pi\tau_k) - \cos(2\pi\tau_{k+1})] \right\}$$

Das Verhalten des Systems wird durch zwei Parameter ϵ und Γ , sowie zwei Anfangsbedingungen Φ_0 und Γ_0 bestimmt.

4.2 Periode-1-Orbit

Für Periode-1-Orbits müssen die beiden Bedingungen

$$\tau_0 := \tau_{k+1} = \tau_k + m \qquad m = 1, 2, \dots$$

$$W_0 := W_{k+1} = W_k$$

gelten, wobei der Ball m Sprünge in einer Periode ausführt. Einsetzen in die Bewegungsgleichungen

$$0 = \left[W_0 + \frac{\Gamma}{\pi} \cos(2\pi\tau_0) \right] m - m^2$$

$$W_0 = -\epsilon \{W_0 - 2m\}$$

liefert die Fixpunkte

$$\frac{\Gamma}{\pi} \cos(2\pi\tau_0) = \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon} m$$

$$W_0 = \frac{2m\epsilon}{1 + \epsilon}$$

Um die Stabilitätsbedingungen zu finden, setzen wir zunächst kleine Auslenkungen (τ'_k, W'_k) aus dem Fixpunkt an.

$$\tau_k = \tau_0 + \tau'_k$$

$$W_k = W_0 + W'_k$$

Setzen wir τ_k und W_k in die Grundgleichungen ein und entwickeln linear, ergibt sich

$$\begin{pmatrix} \tau'_{k+1} \\ W'_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - (1 + \epsilon)\sigma & (1 + \epsilon)/2 \\ 2\epsilon(1 + \epsilon)\sigma(\sigma - 1) & \epsilon^2 - \epsilon(1 + \epsilon)\sigma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tau'_k \\ W'_k \end{pmatrix}$$

mit $\sigma = \Gamma \sin(2\pi\tau_0)$. Damit der Fixpunkt stabil ist, muss der Betrag beider Eigenwerte kleiner als 1 sein:

$$0 < \sigma < \frac{2(1 + \epsilon^2)}{(1 + \epsilon)^2}$$

Daraus folgt ein Stabilitätsbereich im Γ -Parameter für Periode-1-Zyklen:

$$\frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon} \pi m \leq \Gamma \leq \pi \sqrt{\left[\frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon} m \right]^2 + \left[\frac{2(1 + \epsilon^2)}{\pi(1 + \epsilon)^2} \right]^2}$$

4.3 Bifurkationsdiagramm und Liapunov-Exponenten

Auch im Bouncing-Ball-System werden Periodenverdopplungen beobachtet. Abb 4.1(a) zeigt als Beispiel ein Bifurkationsdiagramm. Bei einer Antriebsstärke von $\Gamma \approx 1.7$ geht das System in chaotische Bewegungen über. Daran schließt sich ein Bereich von Sticking-Lösungen an.

Da das System zweidimensional ist, besitzt es zwei Liapunov-Exponenten, die im unteren Teil der Abbildung aufgetragen sind. Für die Charakterisierung der Bewegung

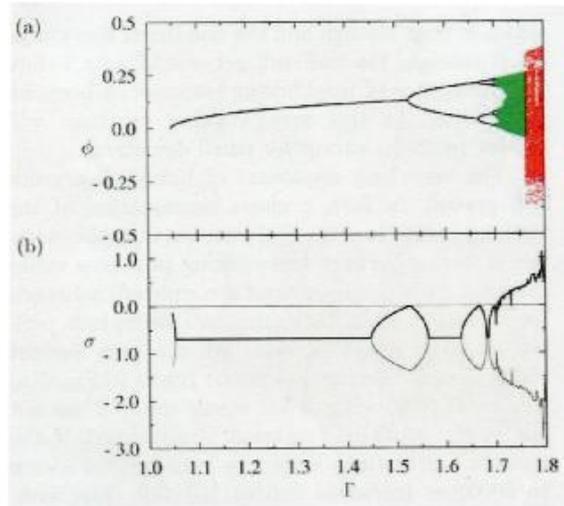


Abbildung 4.1: (a) Bifurkationsdiagramm
 (b) Liapunov-Exponenten
 Lösungstypen: periodisch, **chaotisch**, **sticking**
 $\epsilon = 0.5$, $(\Phi_0, W_0) = (0, 0.66)$

ist der maximale Liapunov-Exponent ausschlaggebend. Er ist für chaotische Lösungen positiv, allerdings auch für die Sticking-Lösungen, die analytisch gesehen periodische Bewegungen sind.

Der positive Liapunov-Exponent beschreibt in diesem Fall die Divergenz zweier benachbarter Trajektorien zwischen zwei Sticking-Ereignissen. Bei den hohen Γ -Werten, für die diese Sticking-Lösungen auftreten, können sich benachbarte Trajektorien durch viele freie Sprünge zwischen dem Steckenbleiben so weit voneinander entfernen, dass die Divergenz beim Sticking-Ereignis nicht wieder zurückgestellt wird.

Es treten zudem nicht periodische Sticking-Trajektorien auf, die unterschiedlich viele freie Sprünge zwischen aufeinanderfolgenden Haftereignissen ausführen. dieses Verhalten wird als „Selbst-wiederbelebendes-Chaos“ bezeichnet und ist ein rein numerischer Effekt. Er hat seine Entsprechung im Experiment; dort sind es kleine äußere Einflüsse, die ihn hervorrufen.

4.4 Langzeitverhalten in Abhängigkeit der Anfangsbedingungen und Parameter

Die Art des Langzeitverhaltens hängt im Allgemeinen empfindlich von den Anfangsbedingungen ab, wie Abb. 4.2 verdeutlicht. Alle drei Lösungstypen existieren für feste Parameter in Bändern nebeneinander.

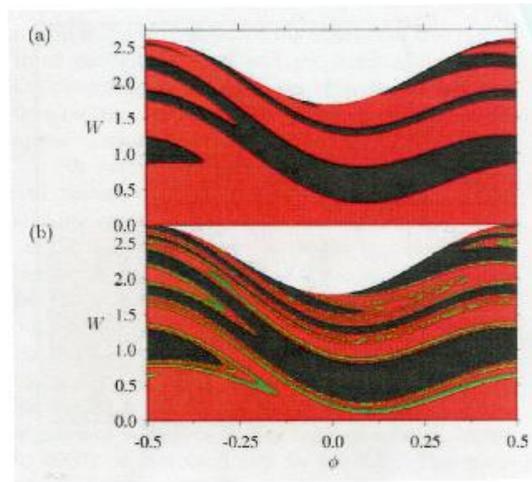


Abbildung 4.2: Langzeitverhalten i.A. der Anfangsbedingungen
 Lösungstypen: periodisch, **chaotisch**, **sticking**
 $\epsilon = 0.5$
 (a) $\Gamma = 1.45$
 (b) $\Gamma = 1.54$

Abb. 4.3 zeigt für zwei Anfangsbedingungen die Parameterbereiche, die zu dem jeweiligen Langzeitverhalten führen. Für kleine, feste ϵ ist die Γ -Abhängigkeit in beiden Diagrammen sehr ähnlich. Sticking-Lösungen folgt eine Periodenverdopplungskaskade mit einem schmalen chaotischen Regime an ihrem Ende.

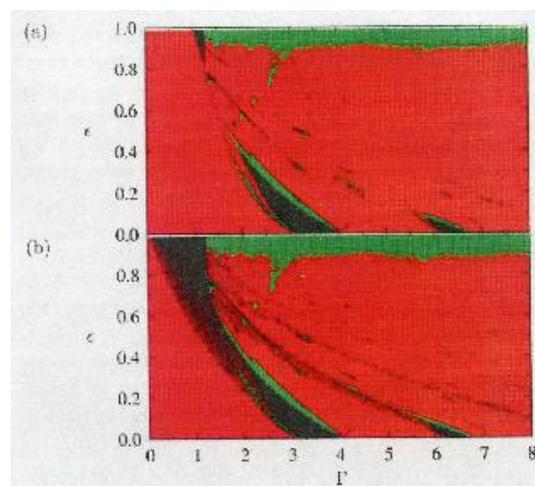


Abbildung 4.3: Langzeitverhalten
 Lösungstypen: periodisch, **chaotisch**, **sticking**
 Anfangsbedingungen:
 (a) $(\Phi_0, W_0) = (-0.25, 0)$
 (b) $(\Phi_0, W_0) = (0, 125)$

Die chaotischen Lösungen im Bereich $\epsilon > 0.8$ sind „selbst wiederbelebendes Chaos“. Insgesamt dominieren die Sticking Lösungen das Verhalten des Bouncing-Balls.

Das wird noch einmal an Abb. 4.4 deutlich. Mit 100 zufällig gewählten Anfangsbedingungen ist für die allermeisten Parameterkombinationen eine Sticking-Lösung möglich (c). „Echtes“ Chaos, außerhalb des Bereiches des selbst wiederbelebenden Chaos, findet sich nur in schmalen Parameterbereichen (b). Zusätzlich ist zu erkennen, dass die unteren Stabilitätsgrenzen der periodischen Lösungen konsistent mit den analytisch abgeleiteten Bedingungen $\epsilon = \frac{\pi m - \Gamma}{\pi m + \Gamma}$ sind.

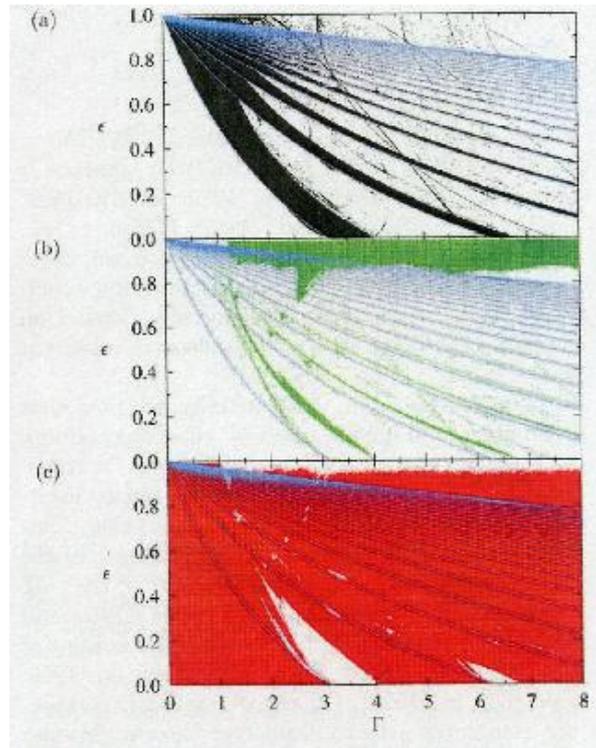


Abbildung 4.4: Langzeitverhalten für 100 gleichverteilte Anfangsbedingungen
Lösungstypen: periodisch, **chaotisch**, **sticking** untere Stabilitätsbereichsgrenzen

Literatur

- *Chaotic Dynamics of a bouncing ball*; Tuffilaro et al.; 1986
- *Nonlinear dynamics and chaos*; Strogatz; 1994
- *Regular and chaotic dynamics in bouncing ball models*; Linz, Vogel; 2010