**Aufgabe 6: Phononen der linearen Kette (3 Punkte)**

Der Hamiltonoperator einer linearen Kette mit Atomen der Masse $M$ im Abstand $a$ habe die Form

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_j \frac{\hat{P}_j^2}{M} + \frac{1}{2} K \sum_j (u_j - u_{j-1})^2 .$$

Zeigen Sie, dass sich mit Hilfe der in der Vorlesung diskutierten Transformation

$$u_j = \sqrt{\frac{\hbar}{N M}} \sum_q \frac{1}{\sqrt{2\,\omega(q)}} \left(\hat{a}(q) + \hat{a}^+(-q)\right) \mathrm{e}^{i\,q\,R_j} ,$$

$$\text{mit } R_j = j \cdot a$$

$$\hat{P}_j = \sqrt{\frac{\hbar M}{N}} \sum_q \sqrt{\frac{\omega(q)}{2}} \frac{1}{i} \left(\hat{a}(q) - \hat{a}^+(-q)\right) \mathrm{e}^{-i\,q\,R_j}$$

der Hamiltonoperator als Summe von Hamiltonoperatoren harmonischer Oszillatoren darstellen lässt. Benutzen Sie dabei die explizite Form der Dispersionsrelation $\omega(q)$ der linearen Kette.

**Aufgabe 7: Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärme im Debye-Modell (4 Punkte)**

In einem Debye-Modell mit gleicher Schallgeschwindigkeit $v$ für alle Zweige $l$ wird die wahre Dispersion der Gitterschwingungen durch $\omega_l = v \cdot |\vec{q}|$ genähert. Diese Relation gilt dann nur für $q \leq q_D$ bzw. bis $\omega_D = v \cdot q_D$. Die Debye-Frequenz $\omega_D$ ergibt sich aus

$$\int_0^{\omega_D} N(\omega)\, d\omega = N_{\text{Zelle}} \qquad \text{mit} \qquad N(\omega): \text{ Zustandsdichte} .$$

a) Berechnen Sie in einem solchen Modell die Zustandsdichte $N(\omega)$ für ein ein- bzw. zweidimensionales System (Kette der Länge $L$ bzw. Quadrat der Fläche $A$).

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Zustandsdichten die Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärme beider Systeme für kleine Temperaturen.

(Wenn Sie in den vorkommenden Integralen so substituieren, dass die Temperatur *vor* dem Integral steht, brauchen Sie die Integrale nicht zu berechnen!)

**Aufgabe 8: Rechnen mit Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren (3 Punkte)**

Die Eigenzustände $|w\rangle = |n_1(\vec{q}_1), n_2(\vec{q}_1), ...\rangle$ des Hamiltonoperators der Phononen

$$\hat{H} = \sum_{l=1}^{3\,N_B} \sum_{j=1}^{N_{\text{Zelle}}} \hbar\,\omega_l(\vec{q}_j) \left(\hat{a}_l^+(\vec{q}_j)\,\hat{a}_l(\vec{q}_j) + \frac{1}{2}\right)$$

lassen sich in der Form

$$|w\rangle = \prod_{l'=1}^{3\,N_B} \prod_{j'=1}^{N_{\text{Zelle}}} \frac{\left(\hat{a}_{l'}^+(\vec{q}_{j'})\right)^{n_{l'}(\vec{q}_{j'})}}{\sqrt{n_{l'}(\vec{q}_{j'})!}} |0\rangle$$

darstellen. Die Operatoren $\hat{a}_l\,(\vec{q}_j)$ und $\hat{a}^+_{l'}\,(\vec{q}_{j'})$ erfüllen die Vertauschungsrelation

$$\left[\hat{a}_l\,(\vec{q}_j),\, \hat{a}^+_{l'}\,(\vec{q}_{j'})\right] \;=\; \delta_{ll'}\,\delta_{jj'}\;.$$

$|0\rangle$ ist der Vakuumzustand mit $\langle 0|0\rangle \;=\; 1$.

a) Zeigen Sie zunächst, dass

$$\hat{a}_l\,(\vec{q}_j)\;\left(\hat{a}^+_l\,(\vec{q}_j)\right)^3\,|0\rangle \;=\; \alpha\,\left(\hat{a}^+_l\,(\vec{q}_j)\right)^2\,|0\rangle$$

ist. Geben Sie den Wert der Zahl $\alpha$ an.

b) Formen Sie den Ausdruck

$$\hat{a}_l\,(\vec{q}_j)\;\left(\hat{a}^+_{l'}\,(\vec{q}_{j'})\right)^{n_{l'}\,(\vec{q}_{j'})}$$

so um, dass alle Erzeugungsoperatoren links von dem Vernichtungsoperator stehen.

c) Zeigen Sie, dass

$$\hat{a}_l\,(\vec{q}_j)\,|w\rangle \;=\; \sqrt{n_l\,(\vec{q}_j)}\,|n_1\,(\vec{q}_1),\,...\,,\,(n_l\,(\vec{q}_j)\,-\,1),\,...\rangle$$

gilt.