Aufgabe 28: Linearer Stark-Effekt (7 Punkte)

Ein Wasserstoffatom befinde sich in einem konstanten elektrischen Feld $\mathbf{E} = E_0\,(0,\,0,\,1)$.

a) Geben Sie den Hamiltonoperator an und stellen Sie den feldabhängigen Störterm $\hat{H}_1$ in Kugelkoordinaten dar. Bleibt m eine gute Quantenzahl?

b) Zeigen Sie, dass die nichtentartete Störungsrechnung 1. Ordnung für alle n, l, m keine Energiekorrektur liefert.

c) Untersuchen Sie den Einfluss des $\mathbf{E}$-Feldes auf die $|nlm\rangle$-Zustände mit $n = 2$ in Störungsrechnung 1. Ordnung. Welche beiden dieser Zustände müssen in entarteter Störungsrechnung behandelt werden, d. h. welche der vier Zustände können überhaupt nur mittels $\hat{H}_1$ koppeln? Berechnen Sie die Energieniveaus und Eigenfunktionen dieser Zustände für $E_0 \neq 0$ im Vergleich mit dem feldfreien Fall.

Aufgabe 29: Spinalgebra und Spindarstellung (7 Punkte)

Der Spinoperator $\hat{\mathbf{S}}$ ist in seiner mathematischen Struktur ein Drehimpulsoperator, der für ein Teilchen mit Spin $s = \frac{1}{2}$ (z. B. Elektron) im zweidimensionalen Spinzustandsraum wirkt. Es gilt:

$$[\hat{S}_l,\, \hat{S}_m] = i\,\hbar\,\hat{S}_n$$

mit $l \neq m \neq n \neq l = x,\, y,\, z$ und zyklisch. Daher gelten alle Operatorrelationen aus den §§ 7.1, 7.2 und 7.4 aus der Vorlesung entsprechend.

a) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\hat{S}_+\,|\uparrow\rangle = 0\ ; \qquad \hat{S}_-\,|\uparrow\rangle = \hbar\,|\downarrow\rangle\ ; \qquad \hat{S}_+\,|\downarrow\rangle = \hbar\,|\uparrow\rangle\ ; \qquad \hat{S}_-\,|\downarrow\rangle = 0\ .$$

b) Aus der Vorlesung wissen Sie, dass gilt:

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\,\sigma_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\ .$$

Berechnen Sie mit Hilfe von $\hat{S}_\pm = \hat{S}_x \pm i\,\hat{S}_y$ und den Ergebnissen aus Teil a) der Aufgabe die analogen Matrizen σ_x und σ_y und zeigen Sie, dass gilt:

$$\hat{S}_+ = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \hat{S}_- = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ .$$

Überzeugen Sie sich davon, dass mit diesen 2×2-Matrizen $\hat{S}_\pm$ die Ergebnisse aus Teil a) wieder folgen. Zeigen Sie weiterhin, dass gilt:

$$[\sigma_x,\, \sigma_y] = 2\,i\,\sigma_z \qquad \text{und zyklisch}$$

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \mathbb{1} \qquad \text{und} \qquad \hat{S}^2 = \frac{3}{4}\,\hbar^2\,\mathbb{1} \qquad \text{mit} \qquad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

c) Zeigen Sie, dass die Antikommutatoren verschiedener Pauli-Matrizen identisch verschwinden, d. h.

$$[\sigma_l,\, \sigma_m]_+ =: \{\sigma_l,\, \sigma_m\} = \sigma_l\, \sigma_m + \sigma_m\, \sigma_l = 0 \qquad \text{für} \qquad l \neq m = x,\, y,\, z\ .$$

d) Überprüfen Sie für die drei Pauli-Matrizen die Relation

$$\sigma_l\, \sigma_m = \mathbb{1}\, \delta_{l,m} + i \sum_n \varepsilon_{lmn}\, \sigma_n \qquad \text{mit} \qquad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

Warum kann jede Funktion der Pauli-Matrizen in der Form

$$f\,(\boldsymbol{\sigma}) = a\, \mathbb{1} + \mathbf{b}\, \boldsymbol{\sigma}$$

mit $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x,\, \sigma_y,\, \sigma_z)$ geschrieben werden?

Aufgabe 30: Matrixdarstellung des Drehimpulsoperators für $l = 1$ (7 Punkte)

Genau wie Spinoperatoren können Drehimpulsoperatoren in einer Eigenbasis $\{|l,\, m\rangle\}$ zu $\hat{L}^2$ und $\hat{L}_z$ als Matrizen dargestellt werden. Diese Matrixdarstellungen werden besonders übersichtlich, wenn man sich für festes l auf einen kleinen Unterraum von $H\,(\hat{L}^2)$ beschränken kann.

a) Geben Sie für $l = 1$ die Matrixdarstellungen der Drehimpulsoperatoren

$$\hat{L}_z\ , \qquad \hat{L}_+\ , \qquad \hat{L}_-\ , \qquad \hat{L}_x\ , \qquad \hat{L}_y$$

an.

b) Überprüfen Sie damit irgendeine der Kommutatorrelationen

i) $[\hat{L}_x,\, \hat{L}_y] = i\,\hbar\, \hat{L}_z$

ii) $[\hat{L}_+,\, \hat{L}_-] = 2\,\hbar\, \hat{L}_z$

iii) $[\hat{L}_\pm,\, \hat{L}_z] = \mp\,\hbar\, \hat{L}_\pm$.

c) Überprüfen Sie, ob im Fall der Matrixdarstellung des Drehimpulsoperators zu $l = 1$ auch wie im Fall der Pauli-Matrizen gilt, dass der Antikommutator verschwindet:

$$[\hat{L}_i,\, \hat{L}_j]_+ =: \{\hat{L}_i,\, \hat{L}_j\} = \hat{L}_i\, \hat{L}_j + \hat{L}_j\, \hat{L}_i \overset{?}{=} 0\ .$$

Aufgabe 31: Erwartungswerte der Spinoperatoren (3 Punkte)

Gegeben sei ein allgemeiner, normierter Spinzustand $\chi\,(t) = a\,(t)\,|\uparrow\rangle + b\,(t)\,|\downarrow\rangle$ eines Teilchens mit Spin $\frac{1}{2}$.

Geben Sie die Erwartungswerte $S_i\,(t) = \langle \chi\,(t)|\hat{S}_i|\chi\,(t)\rangle$ der Operatoren $\hat{S}_i$ mit $i = x,\, y,\, z$ als Funktion der Entwicklungskoeffizienten an und zeigen Sie, dass diese Erwartungswerte reell sind.