Aufgabe 24: Gebundener Zustand im Yukawa-Potential (6 Punkte)

Zwischen zwei Teilchen der reduzierten Masse μ (z. B. Nukleonen) wirke ein kurzreichweitiges Yukawa-Potential

$$V(r) = -r_0\, V_0\, \frac{\mathrm{e}^{-r/r_0}}{r}$$

mit $V_0 > 0$. Ob es in diesem Potential einen gebundenen Zustand gibt, hängt empfindlich von der Reichweite des Potentials ab.

a) Approximieren Sie den Grundzustand durch

$$\psi(r) = \frac{\lambda^{3/2}}{\pi^{1/2}}\, \mathrm{e}^{-\lambda r}$$

und berechnen Sie $E(\lambda)$. Führen Sie nun $\rho := 2\,\lambda\, r_0$ und $T := \hbar^2/2\,\mu_0\, r_0^2$ ein und schreiben Sie die Energie als Funktion von ρ, T, V_0.

b) Welcher Zusammenhang von T, V_0 und ρ ergibt sich aus dem Variationsprinzip für $E(\rho, T, V_0)$ bei festem T und V_0? Es ist nicht notwendig, ρ explizit zu berechnen.

c) Einsetzen des Zusammenhangs zwischen T, V_0 und ρ in $E(\rho, T, V_0)$ erlaubt, T zu eliminieren. Wie groß muss r_0 bei gegebenem V_0 mindestens sein, damit im Rahmen dieser Näherung ein gebundener Zustand auftritt?

d) Das Verhältnis von V_0 und T sei nun $\frac{V_0}{T} = 3$. Lösen Sie die implizite Gleichung für ρ aus Aufgabenteil b) graphisch und berechnen Sie die Energie des Grundzustandes in dieser Näherung.

Aufgabe 25: Anisotropes Exziton (6 Punkte)

Bei der Behandlung von Exzitonen (wasserstoffähnlich gebundene Elektron-Loch-Paare) in Schichtkristallen oder niedrigdimensionalen Systemen stößt man auf Hamiltonoperatoren der Form

$$\hat{H} := -\Delta_{\mathbf{r}} - \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + (1-\alpha)\, z^2}}\ ,$$

wobei Energien und Längen in exzitonischen Einheiten $\mathrm{Ry}^{\mathrm{ex}}$ und a_B^{ex} gemessen werden. Der Parameter α charakterisiert die Anisotropie des Coulomb-Potentials. Für $\alpha = 0$ liegt ein dreidimensionales, für $\alpha = 1$ ein zweidimensionales Coulomb-Potential vor. Es ist sinnvoll, das Potential in Kugelkoordinaten zu schreiben.

Wir betrachten den Fall $0 < \alpha \ll 1$. Berechnen Sie die Energie des Grundzustandes zu

$$\begin{aligned}\hat{H} &:= \hat{T} + \hat{V}_0(r)\, f(\alpha, \vartheta) = \hat{T} + \hat{V}_0(r) + \hat{V}_0(r)\,(f(\alpha, \vartheta) - 1)\\ &=: \hat{H}_0 + \hat{H}_1 \qquad \text{mit} \qquad \hat{V}_0(r) = -\frac{2}{r}\end{aligned}$$

mit $H_0\,|100\rangle = E_{100}\,|100\rangle$ und $\langle r|100\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{e}^{-r}$

a) in erster Ordnung in α mit Hilfe des Hellmann-Feynman Theorems und Taylorentwicklung von $E_{100}(\alpha)$ nach α.

b) in erster Ordnung Störungsrechnung in $\hat{H}_1$

c) per Variationsrechnung mit Hilfe des Ansatzes $\varphi_{100}(\gamma\, r) = \dfrac{\gamma^{3/2}}{\pi^{1/2}}\, \mathrm{e}^{-\gamma\, r}$. Vergleichen Sie die Ergebnisse aus a) bis c).

Hinweis:

$$\int\limits_{\Omega} |Y_{00}|^2\, f(\alpha,\, \varphi)\, d\,\Omega = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\, \arcsin\, \sqrt{\alpha}\ .$$

Aufgabe 26: Diamagnetische Verschiebung (6 Punkte)

Ein Wasserstoffatom befinde sich in einem homogenen Magnetfeld $\mathbf{B} = B\,(0,\, 0,\, 1)$.

a) Geben Sie den Hamiltonoperator (ohne Spin) und das in B lineare Spektrum (normaler Zeeman-Effekt) an.

b) Zeigen Sie, dass der verbleibende Störoperator in 1. Ordnung Störungsrechnung eine positiv definite Korrektur obiger Energieniveaus (diamagnetische Verschiebung) liefert, die im Allgemeinen die Form hat:

$$E^{(1)}_{nlm} = \frac{1}{4}\,\mu\,\omega_L^2\, a_B^2\, n^2\,\{5\,n^2 + 1 - 3\,l\,(l+1)\}\left\{1 - \frac{l^2 - m^2}{4\,l^2 - 1} - \frac{(l+1)^2 - m^2}{4\,(l+1)^2 - 1}\right\}\ .$$

Hinweis: Stellen Sie den Störoperator in Kugelkoordinaten dar und verwenden Sie die in der Vorlesung bzw. in den „Materialien zur Vorlesung“ angegebenen Ausdrücke für $\langle nlm|r^2|nlm\rangle$ und $\cos\vartheta\, Y_{lm}(\vartheta,\, \varphi)$.

c) Geben Sie die diamagnetische Verschiebung der $|nlm\rangle$-Zustände mit $n = 2$ explizit an. Hebt das $\mathbf{B}$-Feld die m- und l-Entartung vollständig auf? Warum ist hier keine entartete Störungsrechnung notwendig?

Aufgabe 27: Wahrscheinlichkeitsstromdichte eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld (6 Punkte)

Der Hamiltonoperator eines Teilchens der Masse m und der Ladung Q im elektromagnetischen Feld lautet

$$\hat{H} = \frac{1}{2\,m}\,(\hat{\mathbf{p}} - Q\,\mathbf{A}\,(\mathbf{r},\, t))^2 + Q\,\varphi\,(\mathbf{r},\, t)\ ,$$

wobei $\mathbf{A}\,(\mathbf{r},\, t)$ und $\varphi\,(\mathbf{r},\, t)$ reell sind. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho\,(\mathbf{r},\, t) = |\psi\,(\mathbf{r},\, t)|^2$ die Kontinuitätsgleichung mit der Wahrscheinlichkeitsstromdichte

$$\mathbf{j}\,(\mathbf{r},\, t) = \frac{\hbar}{2\,i\,m}\,\{\psi^*\,\nabla\,\psi - \psi\,\nabla\,\psi^*\} - \frac{Q}{m}\,\rho\,\mathbf{A}$$

erfüllt.

Hinweis:

$$\mathrm{div}\,(\rho\,\mathbf{A}) = \nabla\,(\rho\,\mathbf{A}) = \rho\,\mathrm{div}\,\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\nabla\,\rho\ .$$