Aufgabe 21: Störungsrechnung für entartete Zustände (6 Punkte)

Gegeben sei ein zweidimensionaler harmonischer Oszillator, der durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2\,m}\left(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2\right) + \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\,(x^2 + y^2)$$

beschrieben wird. Auf diesen wirke das Störpotential

$$\hat{H}_1 = \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\,x\,y\ .$$

Berechnen Sie mit Hilfe der entarteten Störungsrechnung 1. Ordnung die Energiekorrektur der niedrigsten beiden Zustände, die im ungestörten Fall entartet sind.

Hinweis: Verwenden Sie zur Darstellung von $\hat{p}_x$ und $\hat{x}$ die Leiteroperatoren a^+ und a, zur Darstellung von $\hat{p}_y$ und $\hat{y}$ die Leiteroperatoren b^+ und b.

Aufgabe 22: Zwei-Niveau-System (8 Punkte)

Bei einem physikalischen System seien zwei nichtentartete Energieniveaus $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_2$ von besonderem Interesse. Alle anderen Niveaus seien von diesen weit entfernt. Das System kann man dann als sogenanntes Zwei-Niveau-System mit dem Hamiltonoperator

$$\hat{H}_0 := \mathcal{E}_1\,|1\rangle\,\langle 1| + \mathcal{E}_2\,|2\rangle\,\langle 2|$$

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{E}_2 & \text{———————} & |2\rangle \\ \mathcal{E}_1 & \text{———————} & |1\rangle \end{array}$$

beschreiben. Die Zustände $|1\rangle$ und $|2\rangle$ seien orthogonal und normiert.

a) Betrachten Sie die Störung

$$\hat{H}_1 = V\,|1\rangle\,\langle 2| + V^*\,|2\rangle\,\langle 1|\ .$$

Berechnen Sie die Energiekorrekturen in 1. und 2. Ordnung Störungsrechnung.

b) Lösen Sie das Problem nun exakt, indem Sie die Hamiltonmatrix $\langle l|\hat{H}|n\rangle$ mit ($\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$ und $l,\ n = 1,\ 2$) diagonalisieren. Skizzieren Sie E als Funktion von $|V|$.

Entwickeln Sie die exakte Energie bis zur Ordnung $|V|^2$ und vergleichen Sie dieses Ergebnis mit dem Teil a) dieser Aufgabe.

Aufgabe 23: Zentrifugalpotential (10 Punkte)

Die Relativbewegung von Elektron und Proton im Wasserstoffatom unterliege einem zusätzlichen Zentrifugalpotential

$$\hat{H}_1 = \frac{\gamma}{r^2} \qquad \text{mit} \qquad \gamma \text{ reell}\ .$$

a) Berechnen Sie die durch den Störoperator $\hat{H}_1$ verursachte Energiekorrektur 1. Ordnung der gebundenen Wasserstoffzustände.

Berechnen Sie die Korrektur für den Grundzustand explizit. Verwenden Sie für alle anderen Zustände eine geeignete Formel aus den „Materialien zur Vorlesung". Welche Entartung wird durch $\hat{H}_1$ aufgehoben und warum?

b) Berechnen Sie die bestmögliche Approximation für die Grundzustandsenergie E_g zum Gesamthamiltonopertor $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$ mit Hilfe eines Variationsansatzes

$$\psi_g\left(\mathbf{r}\right) = N\,\mathrm{e}^{-\alpha\, r/a_B}\ .$$

Entwickeln Sie Ihr Ergebnis in eine Taylorreihe nach γ und vergleichen Sie diese mit Ihrem Ergebnis aus Teil a) dieser Aufgabe.

c) Geben Sie die Grundzustandsenergie nach a) und b) für

$$\gamma = \frac{1}{20}\, a_B^2\,\mathrm{Ry}$$

an und vergleichen Sie die Ergebnisse. Welches Ergebnis ist besser?