Aufgabe 16: Matrixelemente von $\hat{x}$, $\hat{x}^2$, $\hat{x}^3$und $\hat{x}^4$ beim harmonischen Oszillator (5 Punkte)

Berechnen Sie die Matrixelemente

$$\text{i)}\quad \langle l|\hat{x}|n\rangle\ ,\qquad \text{ii)}\quad \langle l|\hat{x}^2|n\rangle\ ,\qquad \text{iii)}\quad \langle l|\hat{x}^3|n\rangle\ ,\qquad \text{iv)}\quad \langle n|\hat{x}^4|n\rangle$$

zwischen den normierten Oszillatorzuständen $\{|n\rangle\}$. Sie werden sich bei der Lösung der drei folgenden Aufgaben als sehr nützlich erweisen. Bei iv) sind nur die Diagonalelemente gefragt!

Hinweis:

$$\hat{x} = x_0 \cdot \hat{z} = \frac{x_0}{\sqrt{2}}\,(a + a^+) \qquad \text{mit} \qquad x_0 = \left\{\frac{\hbar}{m\,\omega}\right\}^{\frac{1}{2}} .$$

Aufgabe 17: Verschobener Oszillator in Störungsrechnung 2. Ordnung (4 Punkte)

Der Hamiltonoperator des verschobenen harmonischen Oszillator lautet:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2\,m} + \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\,x^2 - \alpha\,x = \hat{H}_0 + \hat{H}_1\ .$$

Berechnen Sie das Spektrum von $\hat{H}$ in Störungsrechnung 2. Ordnung. Wie groß ist die Summe aller Korrekturen höherer Ordnung? Zur Beantwortung dieser Frage empfiehlt es sich, noch einmal die Lösung von Aufgabe 34 (EQM) zu betrachten.

Aufgabe 18: Anharmonischer $\hat{x}^3$-Oszillator (4 Punkte)

Der eindimensionale harmonische Oszillator unterliege einer Störung

$$\hat{H}_1 = \beta\,\hat{x}^3 \qquad \text{mit} \qquad \beta > 0\ .$$

Berechnen Sie die Zustände in 1. Ordnung und die Energien in 2. Ordnung Störungsrechnung.

Aufgabe 19: Anharmonischer $\hat{x}^4$-Oszillator (2 Punkte)

Berechnen Sie die Eigenwerte des anharmonischen Oszillators

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2\,m} + \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\,x^2 + \gamma\,x^4$$

in Störungsrechnung 1. Ordnung.

Stellen Sie den anharmonischen Term durch die Operatoren a und a^+ dar.

Aufgabe 20: Unendlicher Topf mit „Feldboden“ (9 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m befinde sich im folgenden eindimensionalen Potential:

$$V(x) = \begin{cases} -\alpha\, x & 0 \leq x \leq d \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} .$$

a) Skizzieren Sie den Verlauf des Potentials. Überlegen Sie, wie man den Hamiltonoperator des Systems in der Form

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$$

aufteilen kann, so dass $\hat{H}_1$ als Störung behandelt werden kann.

b) Berechnen Sie die Energieniveaus in 1. Ordnung Störungsrechnung und skizzieren Sie das Spektrum.

c) Berechnen Sie die erste Korrektur zur Wellenfunktion des Grundzustandes ($n = 1$).

Warum reicht es, den führenden Term mitzunehmen?

Skizzieren Sie die Wellenfunktion, wenn $V_0 = -\alpha\, d = -2\, E_1$ ist.

Hinweis:

$$\sin^2 y = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2\,y)\right)$$

$$\int \sin(a\,y)\, \sin(b\,y)\, d\,y = \frac{\sin((a-b)\,y)}{2\,(a-b)} - \frac{\sin((a+b)\,y)}{2\,(a+b)} \qquad \text{für} \qquad |a| \neq |b| .$$