Aufgabe 5: Operator-Algebra (6 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für beliebige Operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$ und $\hat{C}$ die Jacobi-Identität gilt:

1. $$[\hat{A},\, [\hat{B},\, \hat{C}]] + [\hat{B},\, [\hat{C},\, \hat{A}]] + [\hat{C},\, [\hat{A},\, \hat{B}]] = 0\ .$$

b) Zeigen Sie durch vollständige Induktion

2. $[\hat{A}^n,\, \hat{B}] = n\, \hat{A}^{n-1}\, [\hat{A},\, \hat{B}]$ falls $[\hat{A},\, [\hat{A},\, \hat{B}]] = 0$ für $n = 1,\, 2,\, ...$

3. $[\hat{A},\, \hat{B}^n] = n\, \hat{B}^{n-1}\, [\hat{A},\, \hat{B}]$ falls $[\hat{B},\, [\hat{A},\, \hat{B}]] = 0$ für $n = 1,\, 2,\, ...$

4. $[\hat{a},\, (\hat{a}^+)^n] = n\, (\hat{a}^+)^{n-1}$ mit $[\hat{a},\, \hat{a}^+] = 1$ für $n = 1,\, 2,\, ...$

c) Zeigen Sie unter den gleichen Voraussetzungen (also $[\hat{A},\, [\hat{A},\, \hat{B}]] = 0$, bzw. $[\hat{B},\, [\hat{A},\, \hat{B}]] = 0$)

5. $$[f\,(\hat{A}),\, \hat{B}] = \frac{d\,f}{d\,\hat{A}}\, [\hat{A},\, \hat{B}]\ ,$$

6. $$[\hat{A},\, g\,(\hat{B})] = \frac{d\,g}{d\,\hat{B}}\, [\hat{A},\, \hat{B}]\ ,$$

wobei eine Operatorfunktion durch ihre Taylorreihe definiert ist, d. h.

$$f\,(\hat{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}\,(0)}{n!}\, \hat{A}^n\ .$$

d) Berechnen Sie

7. $$[\hat{x}_j,\, \hat{H}]\ ,$$

8. $$[\hat{p}_j,\, \hat{H}]$$

für $\hat{H} = \dfrac{\hat{p}^2}{2\,m} + \hat{V}\,(\mathbf{r})$.

Aufgabe 6: Unitäre Operatoren (6 Punkte)

a) Beweisen Sie, dass $\mathrm{e}^{i\,\hat{A}}$ dann und nur dann unitär ist, wenn $\hat{A}$ hermitesch ist. Ein Operator ist unitär, wenn $\hat{U}\,\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\,\hat{U} = 1$ gilt.

b) Die Eigenwerte und Eigenzustände des hermiteschen Operators $\hat{B}$ seien bekannt, d. h. es gelte

$$\hat{B}\,|n\rangle = b_n\,|n\rangle\ .$$

Zeigen Sie, dass $\hat{U}_1 = \mathrm{e}^{i\,\hat{B}}$ ein unitärer Operator ist. Geben Sie die Eigenwerte und Eigenzustände von $\hat{U}_1$ und $\hat{U}_1^\dagger$ an. Welchen Betrag haben die Eigenwerte? Geben Sie $\hat{U}_1$ und $\hat{U}_1^\dagger$ in der Basisdarstellung $\{|n\rangle\}$ an.

c) Geben Sie analog Teil b) der Aufgabe die entsprechenden Größen für den Zeitentwicklungsoperator und den Drehoperator

i) $\hat{U}_2 = \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\,t}$ für $\hat{H} \neq \hat{H}\,(t)$

ii) $\hat{U}_3 = \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\hat{L}_z\,\varphi}$

an.

d) Zeigen Sie explizit im Ortsraum, dass der unitäre Operator

$$\hat{U}\,(d) = \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\hat{p}_x\,d}$$

räumliche Translationen bewirkt, d. h. $\hat{U}\,(d)\,\psi\,(x) = \psi\,(x+d)$.

Aufgabe 7: Exponentialfunktionen nichtkommutierender Operatoren (6 Punkte)

Seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ beliebige lineare Operatoren, die *nicht* von λ abhängen.

a) Zeigen Sie, dass gilt:

i) $$\frac{d}{d\lambda}\left(\mathrm{e}^{\lambda\hat{A}}\,\hat{B}\,\mathrm{e}^{-\lambda\hat{A}}\right) = \mathrm{e}^{\lambda\hat{A}}\,[\hat{A},\,\hat{B}]\,\mathrm{e}^{-\lambda\hat{A}}$$

ii) $$\frac{d}{d\lambda}\left(\mathrm{e}^{\lambda\hat{A}}\,\mathrm{e}^{\lambda\hat{B}}\right) = \mathrm{e}^{\lambda\hat{A}}\,(\hat{A}+\hat{B})\,\mathrm{e}^{\lambda\hat{B}}\ .$$

b) Zeigen Sie, dass gilt (Baker-Hausdorff-Lemma):

$$\mathrm{e}^{\lambda\hat{A}}\,\hat{B}\,\mathrm{e}^{-\lambda\hat{A}} = \hat{B} + \lambda\,[\hat{A},\,\hat{B}] + \frac{\lambda^2}{2!}\,[\hat{A},\,[\hat{A},\,\hat{B}]] + \frac{\lambda^3}{3!}\,[\hat{A},\,[\hat{A},\,[\hat{A},\,\hat{B}]]] + \ldots$$

Hinweis: Entwickeln Sie die Operatorfunktion

$$F\,(\lambda) = \mathrm{e}^{\lambda\hat{A}}\,\hat{B}\,\mathrm{e}^{-\lambda\hat{A}} \qquad \text{um} \qquad \lambda = 0\ .$$

c) Nun gelte insbesondere

$$[\hat{A},\,[\hat{A},\,\hat{B}]] = [\hat{B},\,[\hat{A},\,\hat{B}]] = 0\ .$$

Dies gilt immer, falls $[\hat{A},\,\hat{B}]$ eine c-Zahl ist. Beweisen Sie, dass in diesem Fall das Baker-Hausdorff-Theorem gilt:

$$\mathrm{e}^{\hat{A}+\hat{B}} = \mathrm{e}^{\hat{A}}\,\mathrm{e}^{\hat{B}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\,\hat{B}]} = \mathrm{e}^{\hat{B}}\,\mathrm{e}^{\hat{A}}\,\mathrm{e}^{+\frac{1}{2}[\hat{A},\,\hat{B}]}\ .$$

Hinweis: Leiten Sie mit Hilfe von a) ii) eine homogene Differentialgleichung für

$$G\,(\lambda) = \mathrm{e}^{\lambda\hat{A}}\,\mathrm{e}^{\lambda\hat{B}}$$

ab und lösen Sie diese mit der Anfangsbedingung $G\,(0) = 1$.

Aufgabe 8: Verschobene-Oszillator-Transformation (6 Punkte)

Der Hamiltonoperator eines verschobenen Oszillators laute

$$\hat{\hat{H}} = a^+ a + \frac{1}{2} + \gamma\, a^+ + \gamma^*\, a$$

und es sei der Transformationsoperator

$$\hat{U} = \mathrm{e}^{\gamma^*\, a - \gamma\, a^+}$$

gegeben. Hier sind a^+ und a die Auf- und Absteiger des unverschobenen Oszillators.

a) Zeigen Sie, dass $\hat{U}$ ein unitärer Operator ist.

b) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 7, dass gilt:

$$\hat{U}^\dagger\, a\, \hat{U} = a - \gamma\ , \qquad \hat{U}^\dagger\, a^+\, \hat{U} = a^+ - \gamma^*$$

und berechnen Sie $\hat{U}^\dagger\, a^+\, a\, \hat{U}$.

c) Welcher Zustand wird durch $\hat{U}^\dagger\, |0\rangle$ beschrieben, wenn $|0\rangle$ der Grundzustand zu $\hat{H} = a^+ a + \frac{1}{2}$ ist?

d) Zeigen Sie, dass gilt:

$$a\, \hat{U}^\dagger\, |0\rangle = \gamma\, \hat{U}^\dagger\, |0\rangle\ .$$

e) Berechnen Sie das Spektrum zu $\hat{\hat{H}}$ mit Hilfe der unitären Transformation $\hat{U}$. Transformieren Sie dazu den Hamiltonoperator $\hat{\hat{H}}$ und zeigen Sie, dass sich dabei bis auf eine Konstante der Hamiltonoperator des gewöhnlichen Oszillators ergibt.

Zeigen Sie dann, dass die Eigenfunktionen zu $\hat{\hat{H}}$ die Relation $|\phi_n\rangle = \hat{U}\, |n\rangle$ erfüllen und berechnen Sie die Eigenenergien zu $\hat{\hat{H}}$.

Hinweis: Verwenden Sie die Ergebnisse aus Aufgabe 7 und sehen Sie Aufgabe 34 (EQM) sowie Aufgabe 2 dieses Semesters zum Vergleich.