Aufgabe 3: Zeitabhängigkeit von Glauberzuständen (8 Punkte)

Da der Hamiltonoperator des eindimensionalen harmonischen Oszillators zeitunabhängig ist, ist die Zeitabhängigkeit der Glauberzustände aus Aufgabe 2 einfach durch

$$|\phi_\gamma(t)\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\,t}\,|\phi_\gamma(0)\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\gamma|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\gamma^n}{\sqrt{n!}}\,\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}E_n\,t}\,|n\rangle$$

gegeben. Darin ist $|\phi_\gamma(0)\rangle$ offensichtlich der in Aufgabe 2 behandelte zeitunabhängige Glauberzustand.

a) Führen Sie als zweckmäßige Abkürzung $\Gamma(t) := \gamma\,\mathrm{e}^{-i\,\omega\,t}$ mit $\Gamma(0) = \gamma$ ein und geben Sie $|\phi_\gamma(t)\rangle$ explizit an.

b) Zeigen Sie, dass der Erwartungswert des Operators $\hat{x}$ im zeitabhängigen Glauberzustand die Form

$$\langle\hat{x}\rangle_t := \langle\phi_\gamma(t)|\hat{x}|\phi_\gamma(t)\rangle = \langle\hat{x}\rangle_0\,\cos(\omega\,t) + \frac{\langle\hat{p}_x\rangle_0}{m\,\omega}\,\sin(\omega\,t)$$

hat. Dabei sind

$$\langle\hat{x}\rangle_0 = \langle\phi_\gamma(0)|\hat{x}|\phi_\gamma(0)\rangle =: \langle\hat{x}\rangle \qquad \text{und} \qquad \langle\hat{p}_x\rangle_0 = \langle\phi_\gamma(0)|\hat{p}_x|\phi_\gamma(0)\rangle =: \langle\hat{p}_x\rangle$$

die in Aufgabe 2 c) berechneten Erwartungswerte des Orts- und Impulsoperators zur Zeit $t = 0$.

c) Vergleichen Sie Ihr Resultat aus Teil b) mit dem Ergebnis für $\langle\hat{x}\rangle_t$, das sich als Lösung der Ehrenfest'schen Gleichungen für den harmonischen Oszillator ergibt.

d) Bestimmen und diskutieren Sie $|\phi_\gamma(x,\,t)|^2$, wie es sich in der Ortsdarstellung ergibt.

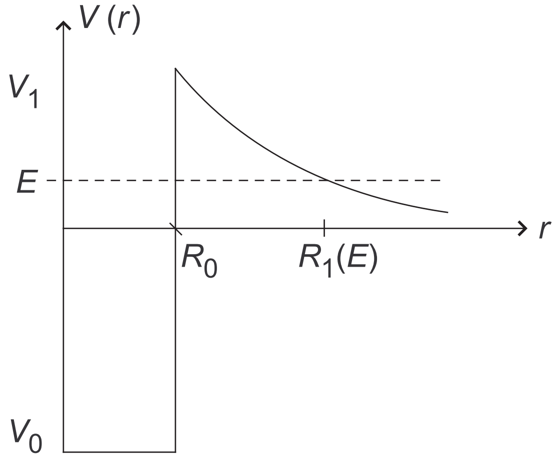
Aufgabe 4: α-Zerfall (16 Punkte)

Es gibt Atomkerne, die spontan durch Aussenden eines α-Teilchens, d. h. eines He-Kerns, in andere Kerne zerfallen können (z. B. $^{212}\mathrm{Po} \to \alpha + {}^{208}\mathrm{Pb}$). Die mittlere Lebensdauer τ solcher Kerne hängt sehr empfindlich von der kinetischen Energie E der austretenden α-Teilchen ab. Diese variiert etwa von 5 bis 10 MeV und die Halbwertzeiten der Kerne variieren dabei um bis zu fünfzehn Größenordnungen. Dieses sehr erstaunliche Verhalten kann man im Gamov-Modell bereits sehr gut verstehen.

Wir betrachten dazu folgendes Modellpotential

$$V(r) = \begin{cases} V_0 & \text{für } 0 \le \nu < R_0 \\ \gamma/r & \text{für } r \ge R_0 \end{cases}$$

mit $V_0 \approx -100$ MeV und $\gamma = 2\,Z\,\mathrm{e}^2/4\,\pi\,\varepsilon_0$.



Die anziehenden Kernkräfte werden durch das Kastenpotential beschrieben und der Coulombterm beschreibt die Abstoßung zwischen dem α-Teilchen ($2\,e$) und dem Restkern ($Z\,e$, $Z = 82$). Die Höhe der Coulombbarriere ist dann $V_1 = \gamma/R_0$. Zum Beispiel ist für Poloniumisotope $R_0 \approx 9$ fm und $V_1 \approx 26$ MeV. Damit ein α-Teilchen, das im Kern eine Energie E hat, zerfallen kann, muss es die Coulombbarriere von R_0 bis $R_1\,(E)$ durchtunneln. Für $E \approx 9$ MeV ist $R_1\,(E) \approx 30$ fm.

a) Berechnen Sie in der WKB-Näherung die Tunnelwahrscheinlichkeit $T\,(E)$, mit der ein α-Teilchen, das aus dem Kern auf die Coulombbarriere auftrifft, diese durchtunnelt. Es empfiehlt sich, an geeigneter Stelle die Substitution $r = R_1 \cos^2 x$ vorzunehmen.

b) Bestimmen Sie die führenden Terme in $T\,(E)$ unter Berücksichtigung der relativen Größe von R_0 und R_1 (d. h. $R_1 \gg R_0$). Entwickeln Sie dafür $T\,(E)$ bis zur Ordnung $\sqrt{\frac{R_1}{R_0}}$.

c) Die mittlere Lebensdauer des Kerns gegen den α-Zerfall ist ungefähr

$$\tau\,(E) = \frac{\Delta\,t}{T\,(E)} \qquad \text{mit} \qquad \Delta\,t = 2\,R_0/v_i\ ,$$

wobei das α-Teilchen im Kern die klassische kinetische Energie

$$E_i = E - V_0 \approx |V_0| = \frac{1}{2}\,M\,v_i^2$$

haben möge. Nach dem Tunneln hat es weit außerhalb des Kerns natürlich die kinetische Energie E. Stellen Sie ein Gesetz zwischen $\ln\tau$ und Z sowie E auf und erläutern Sie, warum τ für variierende Energie E des α-Teilchens um Größenordnungen variieren kann.

d) Berechnen Sie die mittlere Lebensdauer von ^{212}Po ($E_\alpha = 9,0$ MeV) und von ^{210}Po ($E_\alpha = 5,41$ MeV) und vergleichen Sie die Resultate.