Aufgabe 35: Harmonischer Oszillator im Heisenbergbild (6 Punkte)

Wir betrachten einen eindimensionalen harmonischen Oszillator zum einen rein klassisch und zum anderen quantenmechanisch, und zwar im Heisenbergbild.

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung eines klassischen harmonischen Oszillators der Masse m und Frequenz ω auf und lösen Sie diese mit den Anfangsbedingungen $x\,(t = 0) = x_0$ und $m\,\dot{x}\,(t = 0) = p_0$. Geben Sie $x\,(t)$ und $p\,(t)$ an.

b) Bestimmen Sie die Zeitabhängigkeit des Orts- und Impulsoperators für den eindimensionalen harmonischen Oszillator im Heisenbergbild. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Ergebnis für den klassischen Oszillator nach a).

Hinweis: Berechnen Sie unter b) zunächst das Zeitverhalten von $a_H\,(t)$ und $a_H^+\,(t)$ und berücksichtigen Sie dabei, dass

$$\frac{\partial\, a}{\partial\, t} = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial\, a^+}{\partial\, t} = 0$$

ist.

Aufgabe 36: Energiedarstellung und „Bilder“ (3 Punkte)

Sei $\hat{A}$ ein zeitunabhängiger hermitescher Operator und $\hat{H}$ der zeitunabhängige Hamiltonoperator eines quantenmechanischen Systems mit

$$\hat{H}\,|n\rangle = \varepsilon_n\,|n\rangle\ ,$$

wobei $\{|n\rangle\}$ ein VONS zu $\hat{H}$ ist.

a) Geben Sie den Heisenbergoperator

$$\hat{A}_H\,(t) = \hat{U}^+\,(t)\,\hat{A}\,\hat{U}\,(t)$$

in der Energiedarstellung an.

b) Vergleichen Sie die Diagonal- und Nichtdiagonalmatrixelemente von $\hat{A}$ und $\hat{A}_H$ in der Energiedarstellung.

Aufgabe 37: Eigenschaften des Dichteoperators und der Spur eines Operators (9 Punkte)

Gegeben seien die Operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ und der Dichteoperator $\hat{\rho}$ eines quantenmechanischen Systems mit Hilbertraum $\mathcal{H}$. Zeigen Sie, dass gilt:

a) $\mathrm{Sp}\,(\hat{A})$ ist in jeder beliebigen vollständigen Basis aus $\mathcal{H}$ die Summe der Diagonalelemente von $\hat{A}$.

b) $\mathrm{Sp}\,(\hat{A}\,\hat{B}\,\hat{C}) = \mathrm{Sp}\,(\hat{B}\,\hat{C}\,\hat{A}) = \mathrm{Sp}\,(\hat{C}\,\hat{A}\,\hat{B})$ zyklische Invarianz der Spur.

c) $\mathrm{Sp}\,(\hat{A}\,\hat{B}\,\hat{C}) \neq \mathrm{Sp}\,(\hat{B}\,\hat{A}\,\hat{C})$.

d) $\mathrm{Sp}\,(\hat{A}\,\hat{\rho}) = \mathrm{Sp}\,(\hat{\rho}\,\hat{A})$.

e) $\hat{\rho} = \hat{\rho}^{+}$ ist hermitesch.

f) $\hat{\rho}$ hat nur positive, reelle Erwartungswerte.

g) $\mathrm{Sp}\,(\hat{\rho}) = 1$.

h) Der statistische Mittelwert $\langle \hat{A} \rangle$ ist gleich dem quantenmechanischen Erwartungswert von $\hat{A}$, falls das System in einem reinen Zustand vorliegt.

i) Der Dichteoperator eines gemischten Zustandes ist nicht idempotent.

Aufgabe 38: Dichteoperator für einen eindimensionalen harmonischen Oszillator (6 Punkte)

Der Anfangszustand $|\psi\,(0)\rangle$ eines harmonischen Oszillators sei so präpariert, dass die drei energetisch tiefsten Eigenzustände mit der gleichen Wahrscheinlichkeit $p_n \neq 0$ enthalten sind und alle höheren Zustände $|n\rangle$ im gemischten Zustand $|\psi\,(0)\rangle$ nicht vorkommen.

a) Wie ist dann der Dichteoperator $\hat{\rho}\,(t=0) =: \hat{\rho}$ gegeben?

b) Was folgt für den Energieerwartungswert in diesem Zustand?

c) Wie ist $\hat{\rho}\,(t)$ gegeben?

d) Was folgt für den Erwartungswert $H\,(t)$ für $t \neq 0$ und wie entwickelt sich der Energieerwartungswert des Systems mit der Zeit?

e) Was liefert die von Neumann-Gleichung für die Zeitabhängigkeit von $\hat{\rho}\,(t)$ und damit von $H\,(t)$?

Hinweis: Verwenden Sie an geeigneter Stelle die Spektraldarstellung des Hamiltonoperators.