Aufgabe 32: Spin-Resonanz und Rabi-Oszillationen (8 Punkte)

Ein Elektron befinde sich in einem Magnetfeld $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1$ mit

$$\mathbf{B}_0 = B_0\,(0,\,0,\,1) \qquad \text{und} \qquad \mathbf{B}_1 = B_1\,(\cos\omega\,t,\,\sin\omega\,t,\,0)\ .$$

Falls $B_1 = 0$ ist, tritt die in der Vorlesung behandelte Spinpräzession bei zeitlich konstantem S_z auf. Für $B_1 \neq 0$ induziert das zeitabhängige Feld daneben Oszillationen von $S_z\,(t)$, die im Resonanzfall maximal sind. In jedem Fall kann der allgemeine, normierte Spinzustand durch

$$|\chi\,(t)\rangle = a\,(t)\,|\uparrow\rangle + b\,(t)\,|\downarrow\rangle \qquad \text{mit} \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1\,\forall\,t$$

dargestellt werden.

a) Geben Sie die Pauli-Gleichung für $|\chi\,(t)\rangle$ an und verwenden Sie als Abkürzungen $\omega_0 = e\,B_0/m$ und $\omega_1 = e\,B_1/m$.

b) Verwenden Sie als Ansatz zur Lösung der Pauli-Gleichung

$$|\chi\,(t)\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\,\omega\,t\,\hat{S}_z}\,|\tilde{\chi}\,(t)\rangle$$

und zeigen Sie, dass diese damit in die Form

$$i\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial\,t}\,|\tilde{\chi}\,(t)\rangle = \frac{\hbar}{2}\,\{\Delta\,\omega\,\sigma_z + \omega_1\,\sigma_x\}\,|\tilde{\chi}\,(t)\rangle \qquad \text{mit} \qquad \Delta\,\omega := \omega_0 - \omega$$

übergeht.

c) Lösen Sie das unter b) resultierende 2×2-Gleichungssystem mit dem Ansatz

$$|\tilde{\chi}\,(t)\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{i}{2}\,\Omega\,t}\,|\tilde{\chi}\,(0)\rangle\ .$$

Berechnen Sie zunächst die Eigenwerte für beliebiges ω. Bestimmen Sie dann die Eigenfunktionen im Resonanzfall, d. h. für $\omega = \omega_0$, und geben Sie für diesen Fall die allgemeine Lösung $|\tilde{\chi}\,(t)\rangle$ an.

d) Wählen Sie nun als Anfangsbedingung $\tilde{a}\,(0) = 1$ und $\tilde{b}\,(0) = 0$ und berechnen Sie $|a\,(t)|^2$ und $|b\,(t)|^2$. Geben Sie auch mit Hilfe der Ergebnisse aus Aufgabe 31 die Erwartungswerte $S_i\,(t)$ für $i = x,\,y,\,z$ an. Skizzieren Sie $|b\,(t)|^2$ und $S_z\,(t)$. Wieso führt das $\mathbf{B}_1$-Feld zur Spin-Resonanz?

Aufgabe 33: Erwarungswerte von Spin und Drehimpulsoperatoren (8 Punkte)

Das Elektron eines Wasserstoffatoms befinde sich im Zustand

$$\psi_\sigma\,(\mathbf{r}) = R_{21}\,(r)\,\left\{\sqrt{\frac{2}{3}}\,Y_{10}\,(\vartheta,\,\varphi)\,|\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\,Y_{11}\,(\vartheta,\,\varphi)\,|\downarrow\rangle\right\}\ .$$

a) Berechnen Sie die Erwartungswerte der Drehimpuls- und Spinoperatoren

$$\hat{L}^2\ , \qquad \hat{L}_z\ , \qquad \hat{S}^2 \qquad \text{und} \qquad \hat{S}_z\ .$$

b) Zeigen Sie, dass gilt:

$$2\,\hat{\mathbf{L}}\cdot\hat{\mathbf{S}} = \hat{L}_+\,\hat{S}_- + \hat{L}_-\,\hat{S}_+ + 2\,\hat{L}_z\,\hat{S}_z\ .$$

c) Berechnen Sie die Erwartungswerte der Operatoren des Gesamtdrehimpulses

$$\hat{J}^2 \qquad \text{und} \qquad \hat{J}_z \qquad \text{mit} \qquad \hat{J} := \hat{L} + \hat{S} \ .$$

d) Zeigen Sie, dass die Drehimpuls- und Spinzustände

$$|l,\, m_l = l\rangle \cdot |\uparrow\rangle \qquad \text{und} \qquad |l,\, m_l = -l\rangle \cdot |\downarrow\rangle$$

Eigenzustände zum Operator $\hat{L} \cdot \hat{S}$ sind.

Aufgabe 34: Clebsch-Gordan-Koeffizienten (8 Punkte)

Ein Elektron habe den Bahndrehimpuls $l = 1$ und den Spin $1/2$. Die Zustände der gekoppelten Eigenbasis zum Gesamtdrehimpuls können durch die ungekoppelte Basis zum Bahndrehimpuls und zum Spin mit Hilfe der Clebsch-Gordan-Koeffizienten ausgedrückt werden.

a) Wie viele Eigenzustände $|l,\, s,\, j,\, m_j\rangle =: |j,\, m_j\rangle$ zu $\hat{J}^2$ gibt es?

b) Bestimmen Sie alle Eigenzustände $|j,\, m_j\rangle$ als Linearkombinationen der Zustände

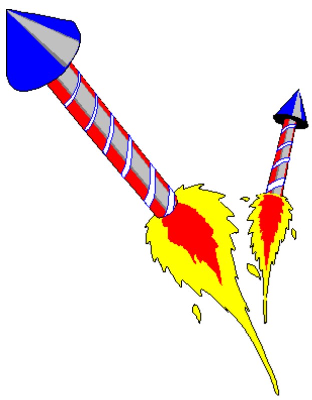
$$|l,\, s,\, m_l,\, m_s\rangle =: |m_l,\, m_s\rangle$$

mit Hilfe der Absteigeoperatoren

$$\hat{J}_- = \hat{L}_- + \hat{S}_- \ .$$

c) Stellen Sie die zugehörige Tabelle der Clebsch-Gordan-Koeffizienten $C\,(l,\, s,\, j,\, m_l,\, m_s,\, m_j)$ auf.

Hinweis: Zu maximalem j und m_j gibt es in der gekoppelten und der ungekoppelten Basis jeweils nur einen Zustand (Phasenfaktor per Konvention gleich 1). Nutzen Sie auch an geeigneter Stelle die Orthogonalität der Drehimpulszustände aus.



Frohes Fest und
einen guten Rutsch
ins neue Jahr!