Aufgabe 1: Der eindimensionale harmonische Oszillator: Matrixdarstellungen (8 Punkte)

In der Heisenberg'schen Matrizenmechanik fasst man Operatoren wie $\hat{x}$, $\hat{p}_x$ oder $\tilde{\mathcal{H}}$ als Matrizen auf, so dass die Definitionsgleichung für die Hamiltonfunktion bzw. den Hamiltonoperator als Matrixgleichung

$$\mathcal{H}_{n,m} = \left\{ \frac{p_x^2}{2\,m} + \frac{1}{2}\, m\,\omega^2\, x^2 \right\}_{n,m}$$

zu verstehen ist, wobei zwischen den Matrizen p_x und x die Vertauschungsrelationen

$$\{p_x\, x - x\, p_x\}_{n,m} = \frac{\hbar}{i}\, \delta_{n,m}$$

gelten sollen. Die zeitliche Konstanz der Energie stationärer Zustände kommt dabei durch die Forderung zum Ausdruck, dass $\mathcal{H}_{n,m}$ diagonal sein soll

$$\mathcal{H}_{n,m} \stackrel{!}{=} E_n\, \delta_{n,m} \ .$$

Die Berechnung der Eigenwerte des harmonischen Oszillators soll hier nicht mit Hilfe der Heisenberg-Methode durchgeführt werden, sondern es sollen vielmehr die Matrixdarstellungen der Operatoren

$$a \ , \qquad a^+ \ , \qquad \hat{p}_x\, \hat{x} \ , \qquad \hat{x}\, \hat{p}_x \ , \qquad \hat{T} = \frac{\hat{p}_x^2}{2\,m} \qquad \text{und} \qquad \hat{V} = \frac{1}{2}\, m\,\omega^2\, \hat{x}^2$$

in der Eigenbasis $\{|l\rangle\}$ zum Zahlenoperator $a^+\, a$ berechnet werden. Die Differenz der Darstellungsmatrizen $\langle n|\hat{p}_x\, \hat{x}|m\rangle$ und $\langle n|\hat{x}\, \hat{p}_x|m\rangle$ liefert dann die Matrixdarstellung der Vertauschungsrelation $\langle n|\, [\hat{p}_x,\, \hat{x}]\, |m\rangle$ und die Summe der Matrixdarstellungen von $\hat{T}$ und $\hat{V}$ liefert dann die Matrixdarstellung des Hamiltonoperators

$$H_{n,m} := \langle n|\hat{H}|m\rangle \ .$$

Warum ist die Struktur der Matrixdarstellung $\langle n|\hat{H}|m\rangle$ viel einfacher als die Struktur von $\langle n|\hat{T}|m\rangle$ und $\langle n|\hat{V}|m\rangle$?

Hinweis: Verwenden Sie die Auf- und Absteigeoperatoren a^+ und a und berücksichtigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \hat{z} &= \frac{\hat{x}}{x_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(a + a^+) \\ \hat{p}_z &= x_0\, \hat{p}_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\hbar}{i}\,(a - a^+) \end{aligned}$$

mit $x_0 = \left\{ \frac{\hbar}{m\,\omega} \right\}^{\frac{1}{2}}$ gilt.

Aufgabe 2: Kohärente Zustände (16 Punkte)

In der Theorie des Lasers sind kohärente Zustände von fundamentaler Bedeutung. Sie wurden von R. Glauber (Physik-Nobelpreis 2005 „für Beiträge zur Quantentheorie der optischen Kohärenz“) eingeführt und firmieren daher auch unter dem Namen „Glauberzustände“. In der Energiedarstellung zum eindimensionalen harmonischen Oszillator mit der Kreisfrequenz ω haben sie die Form:

$$|\phi_\gamma\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\gamma|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \ ,$$

wobei gilt

$$\hat{H}\,|n\rangle = E_n\,|n\rangle = \hbar\,\omega\,\left(n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle \ .$$

Dabei ist $\{|n\rangle\}$ also das VONS der Oszillatoreigenzustände und γ ist eine komplexe Zahl.

a) Zeigen Sie, dass $|\phi_\gamma\rangle$ Eigenzustand zum Absteigeoperator a zum Eigenwert γ ist, d. h. dass gilt:

$$a\,|\phi_\gamma\rangle = \gamma\,|\phi_\gamma\rangle \ .$$

b) Sind die Glauberzustände normiert?

c) Berechnen Sie $\langle\phi_\gamma|a|\phi_\gamma\rangle$ und $\langle\phi_\gamma|a^+|\phi_\gamma\rangle$ und bestimmen Sie damit die Erwartungswerte

$$\langle\hat{x}\rangle := \langle\phi_\gamma|\hat{x}|\phi_\gamma\rangle \qquad \text{und} \qquad \langle\hat{p}_x\rangle := \langle\phi_\gamma|\hat{p}_x|\phi_\gamma\rangle \ .$$

d) Berechnen Sie das Produkt der Unschärfen $\Delta\,x \cdot \Delta\,p_x \equiv \sigma\,(x)\cdot\sigma\,(p_x)$ für Glauberzustände.

e) Identifizieren Sie die physikalische Bedeutung von γ und $|\gamma|^2$, indem Sie diese mit $\langle\hat{x}\rangle$ und $\langle\hat{p}_x\rangle$ verknüpfen.

f) Zeigen Sie, dass die normierte Wahrscheinlichkeit für das Vorkommen eines bestimmten Oszillatorzustandes $|m\rangle$ in $|\phi_\gamma\rangle$ durch eine Poissonverteilung gegeben ist. Betrachten Sie dazu die Norm von $|\phi_\gamma\rangle$ und schieben Sie an geeigneter Stelle eine vollständige $\mathbb{1}$ in der Energiedarstellung ein. Skizzieren oder zeichnen Sie die Verteilung für $|\gamma|^2 = \lambda = 1/2$, $3/2$ und $5/2$.

g) Transformiert man $|\phi_\gamma\rangle$ in die Ortsdarstellung, so erhält man für $\phi_\gamma\,(x) = \langle x|\phi_\gamma\rangle$ die Form

$$\phi_\gamma\,(x) = \left\{\sqrt{\pi}\,x_0\right\}^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left\{\frac{x-\langle\hat{x}\rangle}{x_0}\right\}^2}\,\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\langle\hat{p}_x\rangle\,x} \ .$$

Zeigen Sie, dass $\phi_\gamma\,(x)$ die Eigenwertgleichung $a\,\phi_\gamma\,(x) = \gamma\,\phi_\gamma\,(x)$ erfüllt. Ist $\phi_\gamma\,(x)$ normiert?

Hinweis:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(z + \frac{d}{d\,z}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{z} + \frac{i}{\hbar}\,\hat{p}_z\right) \\ a^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(z - \frac{d}{d\,z}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{z} - \frac{i}{\hbar}\,\hat{p}_z\right) \end{aligned}$$

$$\hat{z} = \frac{\hat{x}}{x_0}\ , \qquad \hat{p}_z = x_0\,\hat{p}_x\ , \qquad x_0 := \left\{\frac{\hbar}{m\,\omega}\right\}^{\frac{1}{2}} =: \frac{1}{k_0} \ .$$