Aufgabe 23: Chemisches Potential des idealen Fermigases in einer bzw. zwei Dimensionen **(schriftlich, 5 Punkte)**

a) [3P] Betrachten Sie ein ideales Fermigas in einer bzw. zwei Dimensionen. Bestimmen Sie das chemische Potenzial μ als Funktion der Temperatur mittels der Näherung der Sommerfeld-Integrationsmethode. Nehmen Sie hierbei $k_B T \ll \mu$ an. Steigt oder sinkt μ mit T, oder bleibt es konstant? Vergleichen Sie das Verhalten mit dem des dreidimensionalen Fermigases. Zeigen Sie, dass man den qualitativen Trend (Zu-/Abnahme von μ mit T) auch ohne jede Rechnung erhält!

b) [2P] Im Falle des zweidimensionalen Fermigases kann man μ auch ohne Sommerfeld-Näherung exakt ausrechnen. Tun Sie dies und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit a). Falls Unterschiede auftreten: worin sind sie begründet?

Aufgabe 24: Halbleiter **(mündlich, 10 Punkte)**

Betrachten Sie einen Halbleiter, dessen Bandstruktur in der Nähe der Energielücke durch ein nach unten dispergierendes Valenzband ($E_v(\vec{k}) = -\frac{\hbar^2}{2\,m_h}\,k^2$) und durch ein nach oben dispergierendes Leitungsband ($E_c(\vec{k}) = E_g + \frac{\hbar^2}{2\,m_w}\,k^2$) gegeben sei. Meistens ist hierbei die Elektronenmasse m_e kleiner als die Lochmasse m_h. [Wie die Bandstruktur fern der Energielücke verläuft, ist im Folgenden irrelevant.] Jeder Zustand kann mit zwei Elektronen besetzt werden (Spinentartung). Bei $T = 0$ sei das Valenzband komplett besetzt, das Leitungsband komplett unbesetzt.

a) [2P] Bestimmen Sie die Zustandsdichte des Systems. Skizzieren Sie die Bandstruktur und die Zustandsdichte.

b) [4P] Bestimmen Sie das chemische Potenzial μ, die Zahl der Elektronen N_e und die Zahl der Löcher N_h als Funktion der Temperatur. Nehmen sie hierbei vereinfachend an, dass $\mu \gg k_B T$ und $(E_g - \mu) \gg k_B T$ gilt, und verfahren Sie ähnlich wie in Aufgabe 22 c. Nutzen Sie ferner aus, dass (wegen der Ladungsneutralität des Gesamtsystems) $N_e = N_h$ gelten muss. Zeigen Sie, dass $N_e \cdot N_h \sim T^3 \exp(-E_g/k_B T)$ gilt. Skizzieren Sie $\mu(T)$.

c) [4P] Betrachten Sie nunmehr einen n-dotierten Halbleiter, der bei der Energie E_d (knapp unterhalb der Leitungsbandkante) einen zusätzlichen nicht-dispergierenden Zustand habe (solche Donator-Niveaus werden durch die Dotier-Atome bereitgestellt). Dieser Zustand soll maximal $N_{d,0}$ Elektronen aufnehmen können; seine tatsächliche Besetzungszahl ist durch $N_d = N_{d,0} \cdot n(\mu, T)$ gegeben, wobei $n(\mu, T)$ natürlich wieder die Fermi-Verteilungsfunktion ist.

   Nehmen Sie vereinfachend an, dass nun $(E_g - \mu) \ll \mu$ gelte (d. h. das chemische Potential liegt weit näher am Leitungsband als am Valenzband), so dass $N_h \ll N_e$ gilt. Nehmen Sie ferner an, dass (als Vereinfachung der Ergebnisse aus b) N_e durch den Ausdruck $N_e = N_{e,0} \exp(\beta(\mu - E_g))$ gegeben sei, wobei $N_{e,0} \gg N_{d,0}$ gelten möge. Bestimmen Sie nun mit Hilfe der Ladungsneutralität die Zahl N_e der freien Elektronen im Leitungsband.

Zeigen Sie, dass für niedrige Temperaturen $N_e = \sqrt{N_{e,0}\, N_{d,0}}\, \exp\left(-\beta\,(E_g - E_d)/2\right)$ gilt, während sich für hohe Temperaturen $N_e = N_{d,0}$ ergibt.

Skizzieren und diskutieren Sie N_e und μ als Funktion der Temperatur.

Aufgabe 25: Schwarzkörperstrahlung **(schriftlich, 5 Punkte)**

Betrachten Sie einen hohlen Kasten, der mit einem Photonengas der Temperatur T gefüllt sei. Eine Wand des Kastens habe ein (infinitesimal kleines) Loch der Größe $d\,A$, aus dem Strahlung austrete. Bestimmen Sie die Intensität der Strahlung, und zwar als Funktion der Wellenlänge λ und des Winkels θ zur Normalen der Wand ($\theta = 0$: Strahlung tritt senkrecht aus; $\theta = \pi$: „streifendes“ Austreten). Wie hoch ist die gesamte Abstrahl-Intensität aus dem Loch?

Hinweis: $$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\, d\,x = \frac{\pi^4}{15}$$