

**Aufgabe 13: Harmonischer Oszillator im kanonischen Ensemble (schriftlich, 11 Punkte)**

Betrachten Sie einen eindimensionalen harmonischen Oszillator mit Hamiltonian

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 .$$

- [4P] Bestimmen Sie im Rahmen des *klassischen* kanonischen Ensembles den Mittelwert der Energie sowie ihre Fluktuation, die Mittelwerte von p und q sowie die zugehörigen Fluktuationen und die Wärmekapazität.
- [4P] Berechnen Sie erneut den Mittelwert der Energie, aber jetzt im Rahmen der *Quantenmechanik*. Untersuchen Sie das Verhalten der Energie und der Wärmekapazität im Grenzfall tiefer und hoher Temperaturen und diskutieren Sie Unterschiede und Gemeinsamkeiten zu den Ergebnissen aus a).
- [3P] Nochmals klassisches kanonisches Ensemble: Addieren Sie zur Hamilton-Funktion eine Anharmonizität $-\alpha q^3$ (mit $\alpha > 0$) und untersuchen Sie (für kleine α) den Mittelwert von q . Hierzu betrachten Sie den Anharmonizitäts-Beitrag zum Boltzmann-Faktor als eigenständigen Vorfaktor und entwickeln ihn als Taylor-Reihe (in erster Ordnung) in α . Zeigen Sie, dass $\langle q \rangle$ mit der Temperatur linear zunimmt (\rightarrow Wärmeausdehnung).

Aufgabe 14: Harmonische Oszillatoren im mikrokanonischen Ensemble (mündlich, 9 Punkte)

Betrachten Sie N klassische harmonische eindimensionale Oszillatoren, die jeweils eine Hamilton-Funktion

$$H(q_i, p_i) = \frac{p_i^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega^2 q_i^2$$

haben mögen; die gesamte Hamilton-Funktion ist durch die Summe dieser Beiträge gegeben.

- [4P] Bestimmen Sie für vorgegebene Energie E das Phasenraum-Volumen zu $H(\vec{q}, \vec{p}) \leq E$. Hinweis: die Substitution $x_i := m\omega q_i$ könnte nützen.
- [3P] Bestimmen Sie nun die Zahl der Mikrozustände für einen Energiebereich $[E - \frac{\Delta}{2}, E + \frac{\Delta}{2}]$. Verwenden Sie h^N als „Phasenraum-Volumen“ eines Mikrozustandes und berücksichtigen Sie Ununterscheidbarkeit. Berechnen Sie hieraus die Entropie $S(E, N)$ des Systems.
- [2P] Bestimmen Sie aus $S(E, N)$ die Temperatur als Funktion von E und die Wärmekapazität. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit denen aus dem kanonischen Ensemble.