**6. Übung Theoretische Ergänzungen zu Physik II (SS 2017)** **Vorlesung: Prof. Krüger**
**Ausgabe: 21.07.2017, Abgabe: 26.07.2017** **Übungen: Dr. Kovařík**

---

**Aufgabe TE14: Hamilton-Jacobi-Theorie für Fall im Schwerefeld (schriftlich, 8 Punkte)**

Ein Teilchen mit der Masse $m$ befinde sich in einem Potential $V(q)$. Zur Berechnung der Bahnkurve transformiert man im Rahmen der Hamilton-Jacobi-Theorie die Orts- und Impulskoordinaten auf neue Variablen $\tilde{q}$ und $\tilde{p}$, die zeitlich konstant sind. $\tilde{q} = t_0$ hat die Dimension einer Zeit und $\tilde{p}$ ist gleich der Energie des Systems. Die Koordinatentransformation wird durch die erzeugende Funktion $S(q, \tilde{p}, t)$ beschrieben, welche der Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$H(q, p, t) + \frac{\partial S(q, \tilde{p}, t)}{\partial t} = 0$$

mit $p = \dfrac{\partial S}{\partial q}$ und $\tilde{p} = E$ gehorcht.

a) [3 Punkte] Stellen Sie die Hamilton-Funktion auf und zeigen Sie, dass für dieses System

$$S(q, E, t) = \pm \int \sqrt{2m(E - V(q))}\, dq - E \cdot t + C$$

eine Lösung der obigen Differentialgleichung ist ($C$ = Konstante).

b) [3 Punkte] Bestimmen Sie $S(q, E, t)$ für das Potential $V(q) = m g q$. Wie hängen die Vorzeichen des Integrals mit der Richtung von $p$ zusammen? Berechnen Sie für $\tilde{q} = \dfrac{\partial S}{\partial E} = t_0$ und lösen Sie die resultierende Gleichung nach $q$ auf.

c) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Konstanten $E$ und $t_0$ für die Anfangsbedingungen $q(t = 0) = 0$ und $\dot{q}(t = 0) = -v_0$ (mit $v_0 > 0$) und geben Sie $q(t)$ an.

**Aufgabe TE15: Lorentzkraft (mündlich, 6 Punkte)**

a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass man die Lagrange-Gleichungen zweiter Art

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_j}\right) = Q_j\ ,$$

falls die Kraft $Q_j$ durch ein verallgemeinertes Potential $\mathcal{U}(q, \dot{q}, t)$

$$Q_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_j}\right)$$

gegeben ist, als

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\right) = 0 \qquad \text{wobei} \qquad L = T - \mathcal{U}\ ,$$

schreiben kann.

b) [4 Punkte] Die Lorentzkraft ist gegeben durch

$$\vec{F} = q \left( \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right) .$$

Zeigen Sie, dass sich die Lorentzkraft mit Hilfe eines Skalarpotentials $\phi(\vec{r}, t)$ und eines Vektorpotentials $\vec{A}(\vec{r}, t)$ als

$$F_j = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{x}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_j}$$

schreiben lässt. Das verallgemeinerte Potential $\mathcal{U}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ ist dabei durch

$$\mathcal{U}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = q\,(\phi(\vec{r}, t) - \sum_i \dot{x}_i A_i(\vec{r}, t))$$

gegeben.

*Hinweis*: Das elektrische und das magnetische Feld sind durch

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} , \qquad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t) ,$$

gegeben.

## Aufgabe TE16: Noether-Theorem: Galilei-Transformation (schriftlich, 6 Punkte)

Ein Teilchen der Masse $m$ bewegt sich im Schwerefeld der Erde. Seine Lagrange-Funktion ist

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - m g x .$$

a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Transformation

$$x \quad \longrightarrow \quad x' = x + \epsilon t$$

die Lagrange-Funktion bis auf einen Term $\epsilon \frac{d}{dt} f(x', t)$ invariant lässt. Bestimmen Sie die Funktion $f(x, t)$.

b) [2 Punkte] Berechnen Sie mit dem Noether-Theorem die dazu gehörende Erhaltungsgröße.

c) [1 Punkt] Berechnen Sie aus der Lagrange-Funktion $L(x, \dot{x})$ die zugehörige Bewegungsgleichung und bestimmen Sie deren Lösung.

d) [1 Punkt] Benutzen Sie die Lösung aus Aufgabenteil c) um nachzuweisen, dass die Erhaltungsgröße aus Aufgabenteil b) in der Tat zeitlich konstant ist.