Aufgabe TE3: Lagrange-Gleichungen **(mündlich, 6 Punkte)**

a) [2 Punkte] Die Lagrange-Funktion $L(\vec{r},\, \dot{\vec{r}},\, t)$ eines Teilchens, das sich in einem Potential $V(\vec{r})$ bewegt, lautet $L = T - V$, wobei T die kinetische Energie des Teilchens ist. Der Ortsvektor $\vec{r}$ sei in kartesischen Koordinaten $\vec{r} = (x_1,\, x_2,\, x_3)$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \qquad \text{für} \qquad i = 1,\, 2,\, 3$$

äquivalent zu den Newton'schen Bewegungsgleichungen für das Teilchen sind.

b) [4 Punkte] Die Lagrange-Gleichungen sind invariant gegenüber Koordinatentransformationen. Zeigen Sie dies für den eindimensionalen Fall. Gehen Sie dabei von $L(x,\, \dot{x},\, t)$ aus und betrachten Sie die Transformation von der Koordinate x auf die Koordinate q. Es gelte $x = x(q,\, t)$.

i) Überzeugen Sie sich zunächst davon, dass

$$\frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}} \qquad \text{und} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial q}$$

gilt.

ii) Zeigen Sie dann, dass die Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

mit der Lagrange-Funktion $\tilde{L}$ in den neuen Koordinaten

$$\tilde{L}(q,\, \dot{q},\, t) = L(x(q,\, t),\, \dot{x}(q,\, \dot{q},\, t),\, t)$$

die Form

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q} = 0$$

hat. Berechnen Sie unter Anwendung der nachstehenden Rechenregeln zunächst $\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}}$.

Hinweis: Allgemein gilt:

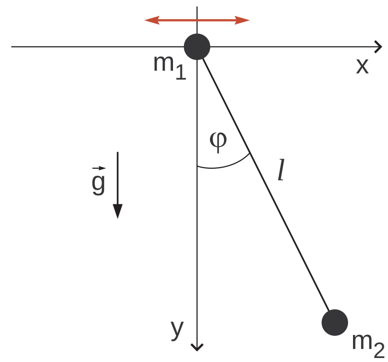
$$\frac{d}{dt} f(y,\, z) = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \dot{z}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial w} f(y,\, z) = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial w}\,.$$

Aufgabe TE4: Horizontal bewegliches Pendel (mündlich, 6 Punkte)

Bei einem ebenen Pendel (Länge l, Pendelmasse m_2) im Schwerefeld der Erde kann sich der Aufhängepunkt mit Masse m_1 reibungsfrei in horizontaler Richtung bewegen (siehe Abbildung).



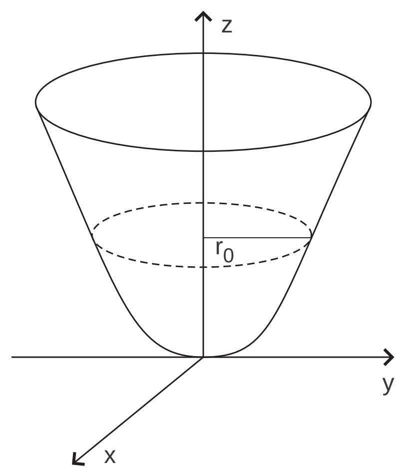
a) [2 Punkte] Geben Sie die potentielle und die kinetische Energie des Systems an, wobei Sie systemangepasste Koordinaten verwenden sollten.

b) [1 Punkt] Wie lautet die Lagrange-Funktion?

c) [1 Punkt] Bestimmen Sie mittels der Lagrange-Gleichungen die Bewegungsgleichungen des Systems.

d) [2 Punkte] Integrieren Sie die Bewegungsgleichungen für kleine Pendelausschläge, d. h. in linearer Näherung in φ auf, um die Lösung des Systems zu bestimmen.

Aufgabe TE5: Teilchen auf dem Rotationsparaboloid (schriftlich, 8 Punkte)



Unter dem Einfluss der Schwerkraft bewege sich ein Massenpunkt mit Masse m reibungsfrei auf dem Mantel eines aufrecht stehenden Rotationsparaboloiden, der durch

$$z = \frac{1}{2} b \left(x^2 + y^2\right)$$

mit $b = \text{const.}$ definiert ist.

a) [2 Punkte] Welcher Zwangsbedingung unterliegt die Teilchenbewegung und welche systemangepassten generalisierten Koordinaten bieten sich an?

b) [2 Punkte] Bestimmen Sie die kinetische Energie T, die potentielle Energie V und die Lagrange-Funktion $L = T - V$ des Teilchens.

c) [2 Punkte] Wie lauten die zugehörigen Lagrange-Gleichungen?

d) [1 Punkt] Das Teilchen bewege sich stabil auf einer horizontalen Kreisbahn auf der Höhe $z = z_0$ mit Radius r_0. Für welche Energie und welchen Drehimpuls ist das möglich?

e) [1 Punkt] Das Teilchen werde von der horizontalen Bahn leicht nach unten gestoßen. Bestimmen Sie die Frequenz der Oszillation um die ungestörte Bahn r_0, falls die Oszillationsamplitude $|\rho(t)| = |r(t) - r_0|$ klein ist.