

Aufgabe 43: Messung von Drehimpulsen

(mündlich, 10 Punkte)

Ein Teilchen mit dem Drehimpuls $l = 1$ befinde sich in einem Magnetfeld $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$. Der Hamiltonoperator des Systems lautet

$$H = \frac{e}{2m} \vec{L} \cdot \vec{B}.$$

Die Basis der Eigenzustände zu L_z lautet $\{|+1\rangle, |0\rangle, |-1\rangle\}$. Darin ergeben sich die Matrixdarstellungen der Drehimpulsoperatoren zu

$$L_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$
$$L_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad L^2 = 2\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das System im Zustand

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+1\rangle - |-1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- a) [2 Punkte] Zum Zeitpunkt $t = 0$ misst man die Energie des Systems. Welche Werte können sich mit welchen Wahrscheinlichkeiten ergeben? Berechnen Sie für den Fall, dass sich das System im Zustand $|\psi(0)\rangle$ befindet, den Erwartungswert $\langle H \rangle$ und die Standardabweichung ΔH .

Hinweis: Verwenden Sie die Frequenz $\omega = e B_0 / 2m$.

- b) [2 Punkte] Statt H misst man zum Anfangszeitpunkt die Observable $(L_x^2 + L_y^2)$. Welche Ergebnisse kann man mit welchen Wahrscheinlichkeiten erhalten? In welchem Zustand befindet sich das System unmittelbar nach der Messung?

Hinweis: Wenden Sie $(L_x^2 + L_y^2)$ auf $|\psi(0)\rangle$ an.

- c) [2 Punkte] Berechnen Sie den Zustandsvektor $|\psi(t)\rangle$ zur Zeit t .

- d) [2 Punkte] Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle L_x^2 + L_y^2 \rangle(t)$ und $\langle L_x \rangle(t)$.

- e) [2 Punkte] Welche Resultate erhält man mit welchen Wahrscheinlichkeiten, wenn man zur Zeit t die Observable $(L_x^2 + L_y^2)$ bzw. L_x misst? Deuten Sie Ihr Ergebnis!

Hinweis: Für die Betrachtung von L_x benötigen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von L_x .

Aufgabe 44: Berylliumspektrum**(schriftlich, 10 Punkte)**

In einer Vakuumbogenlampe mit Berylliumelektroden wird ein Lichtbogen erzeugt. Betrachten Sie die niederenergetischen Anregungen eines einzelnen Elektrons aus der Grundzustandskonfiguration $1s^2 2s^2$ eines neutralen Berylliumatoms.

- a) [1 Punkt] Welche Ordnungszahl Z hat Beryllium?
- b) [2 Punkte] Werden die Elektron-Elektron-Wechselwirkungen im Berylliumatom besser durch die LS-Kopplung oder durch die jj-Kopplung modelliert? Warum?
- c) [2 Punkte] Durch einen Elektronenstoß im Lichtbogen wird ein $2s$ -Elektron angeregt. Welche Orbitale kommen dafür bis zur $n = 4$ -Schale in Frage?
- d) [2 Punkte] Skizzieren Sie das Termschema für Anregungen eines $2s$ -Elektrons bis zur $n = 3$ -Schale. Berücksichtigen Sie dabei die Kopplung der Spins und geben Sie jeweils den Gesamtdrehimpuls an.
- e) [3 Punkte] Welche Zustände sind metastabil und können nicht durch einen optischen Dipolübergang zerfallen? Aufgrund welcher konkreten Auswahlregeln? Welcher Übergang gehört zur Resonanzlinie?