

Aufgabe 1: de Broglie-Wellenlängen

(mündlich, 2 Punkte)

Berechnen Sie die de Broglie-Wellenlängen für folgende Körper:

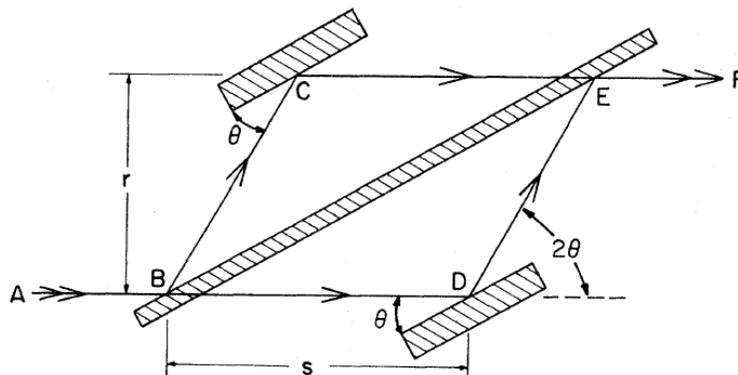
- i) ein thermisches Neutron mit der Energie $E = 25 \text{ meV}$,
- ii) ein Elektron mit einer Energie $E = 100 \text{ eV}$,
- iii) ein Elektron aus einem Teilchenbeschleuniger mit einer Energie $E = 1 \text{ GeV}$,
 (*Hinweis:* relativistische Rechnung notwendig.)
- iv) ein Staubkorn mit dem Durchmesser $1 \mu\text{m}$, der Masse $m = 10^{-15} \text{ kg}$ und der Geschwindigkeit $v = 1 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$,
- v) einen Langstreckenläufer ($m = 70 \text{ kg}$, $v = 12 \frac{\text{km}}{\text{h}}$).

Vergleichen Sie die erhaltene Wellenlänge jeweils mit der Größe der Objekte.

Aufgabe 2: Interferenz von Materiewellen

(mündlich, 3 Punkte)

Wir betrachten im Folgenden das abgebildete Interferometer im homogenen Schwerfeld der Erde (Phys. Rev. Lett. **33**, 1237 (1974)). Ein bei A emittierter, monochromatischer Neutronenstrahl (Masse m , Energie 25 meV) wird bei B geteilt. Die Strecken BD und CE werden mit zwei verschiedenen potentiellen Energien durchlaufen. Bei E werden die Teilstrahlen zusammengeführt und kohärent überlagert. Die Detektion erfolgt bei F .



- a) Verwenden Sie die de Broglie-Beziehung, um die Differenz Δk der Wellenvektoren auf den genannten Strecken zu ermitteln.
 (*Hinweis:* $\Delta k \ll k$ (lineare Näherung).)
- b) Bei E tritt eine Phasenverschiebung $\phi = s \cdot \Delta k$ zwischen den beiden Teilstrahlen auf ($s = BD = CE$). Es sei nun $s = 5 \text{ cm}$. Variiert man durch das Drehen des Interferometers um die Achse AD die Höhe r um einen Wert Δr , bewirkt dies eine Änderung der Phasenverschiebung $\Delta \phi$. Wie groß muss Δr sein, um eine Änderung der Phasenverschiebung um π (destruktive Interferenz) bzw. um 2π (konstruktive Interferenz) zu erzielen?

Aufgabe 3: Bohr-Sommerfeld'sche Quantenbedingung**(mündlich, 5 Punkte)**

Zu Beginn der Quantentheorie wurde versucht, die Diskrepanz zwischen den Aussagen der klassischen Mechanik über die Bewegung von Teilchen im mikroskopischen Bereich und den experimentell gefundenen Tatsachen aufzuheben, indem man die Gesetze der klassischen Mechanik durch Zusatzbedingungen (die Quantenbedingungen) ergänzte. Wird ein mechanisches System durch die Koordinaten $\{q_i\}$ und die Impulse $\{p_i\}$ beschrieben, so sollten nach Sommerfeld (1915) folgende Linienintegrale (Phasenintegrale) ganzzahlige Vielfache einer universellen Konstante (des Planck'schen Wirkungsquantums h) sein:

$$\oint p_i dq_i = n_i h \quad (\text{Bohr-Sommerfeld'sche Quantenbedingung}).$$

Die angegebenen Linienintegrale erstrecken sich über eine geschlossene klassische Bahn. Die Koordinaten q_i stellen nicht notwendigerweise kartesische Koordinaten dar, sondern können verallgemeinerte Koordinaten sein, p_i ist der zu q_i kanonisch konjugierte Impuls. Das Wasserstoffmodell von Bohr beruht auf der Vorstellung, dass sich ein Elektron der Masse m und der Ladung $-e$ um den Kern der Masse M und der Ladung $+e$ bewegt (Kepler-Problem). Da die Bewegung in einer Ebene erfolgt, können ebene Polarkoordinaten r, φ zur Beschreibung verwendet werden, das heißt es gilt

$$q_1 = r, \quad q_2 = \varphi.$$

Wie im Rahmen der Lagrange-Mechanik hergeleitet wird, lauten die dazu konjugierten Impulse

$$p_1 = \mu \dot{r}, \quad p_2 = L = \mu r^2 \dot{\varphi}.$$

Dabei ist L der Drehimpuls, die reduzierte Masse μ ist gegeben durch

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{M} + \frac{1}{m}.$$

- Berechnen Sie unter Verwendung der klassischen Lösung des Kepler-Problems die beiden Phasenintegrale. Bestimmen Sie damit die mit der Quantenbedingung verträglichen Energiewerte.
- Diskutieren Sie die durch die Quantisierung ausgewählten Bahnen und skizzieren Sie diese jeweils für die beiden niedrigsten Werte von n_1 und n_2 .

Hinweis: Verwenden Sie die Bahnkurve des Kepler-Problems in der Form

$$r(\varphi) = \frac{\gamma}{1 + \varepsilon \cos(\varphi)}.$$

In Analogie zur Gravitation gilt für Ellipsenparameter γ und Exzentrizität ε :

$$\gamma = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\mu e^2} p_2^2, \quad \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{32\pi^2\varepsilon_0^2|E|}{\mu e^4} p_2^2}.$$

Nehmen Sie zweckmäßigerweise auch im Phasenintegral über r den Winkel φ als Integrationsvariable.