

Aufgabe 26 (schriftlich): Drehimpuls-Erwartungswerte

(3 Punkte)

Ein System sei in einem Eigenzustand $|j, m\rangle$ zu J^2 und J_z mit

$$J^2 |j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j, m\rangle, \quad J_z |j, m\rangle = \hbar m |j, m\rangle.$$

Die Leiteroperatoren sind definiert als

$$J_{\pm} = J_x \pm iJ_y \quad \text{mit} \quad J_{\pm} |j, m\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} |j, m \pm 1\rangle \quad \text{und} \quad [J_+, J_-] = 2\hbar J_z.$$

Berechnen Sie hierfür $\langle J_x \rangle$ und $\langle J_x^2 \rangle$.

Aufgabe 27 (mündlich): Vertauschungsrelationen

(4 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Vertauschungsrelationen für die Komponenten L_i des Bahndrehimpulsoperators $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

(i) $[L_i, r_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} r_k$

(ii) $[L_i, p_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} p_k$

(iii) $[L_i, r^2] = [L_i, p^2] = [L_i, \vec{r} \cdot \vec{p}] = 0$

Dabei wurde die Einsteinsche Summenkonvention verwendet, d. h. über doppelt auftretende Indizes wird summiert.

Aufgabe 28 (mündlich): Erwartungswerte beim Wasserstoffatom

(6 Punkte)

Die Grundzustandswellenfunktion des Wasserstoffatoms lautet

$$\psi_{100}(\vec{r}) = R_{10}(r) Y_0^0(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_B^3}} e^{-\frac{r}{a_B}},$$

dabei ist a_B der Bohr-Radius

$$a_B = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{m e^2}.$$

a) Berechnen Sie die Orts- und Impulserwartungswerte

$$\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle, \langle p_x \rangle, \langle p_y \rangle, \langle p_z \rangle$$

sowie die Erwartungswerte der Quadrate

$$\langle x^2 \rangle, \langle y^2 \rangle, \langle z^2 \rangle, \langle p_x^2 \rangle, \langle p_y^2 \rangle, \langle p_z^2 \rangle$$

und zeigen Sie, dass die Unschärferelation in jeder Koordinate erfüllt ist.

b) Berechnen Sie die Erwartungswerte des Betrags des Ortsvektors $\langle r \rangle$ und seines Inversen $\langle \frac{1}{r} \rangle$ sowie die Erwartungswerte von kinetischer $\langle T \rangle$ und potentieller $\langle V \rangle$ Energie. Verifizieren Sie die Beziehung $2 \langle T \rangle = - \langle V \rangle$.

Anmerkung: Dies ist ein Spezialfall des aus der klassischen Mechanik bekannten Virialsatzes, der für eine Bewegung im Potential $V(r) = ar^n$ besagt: $2 \langle T \rangle = n \langle V \rangle$.

Aufgabe 29 (schriftlich): Kugelsymmetrischer Potentialtopf

(6 Punkte)

Ein Teilchen der Masse befindet sich im kugelsymmetrischen Potential

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{für } r \leq a \\ 0 & \text{für } r > a \end{cases}$$

- a) Wie lautet die zeitunabhängige Schrödingergleichung in Kugelkoordinaten?
- b) Machen Sie den Separationsansatz

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = R(r)Y_l^m(\vartheta, \varphi) .$$

Die Kugelflächenfunktionen $Y_l^m(\vartheta, \varphi)$ sind Eigenfunktionen zum Drehimpulsoperator L^2 :

$$L^2 Y_l^m(\vartheta, \varphi) = \hbar^2 l(l+1) Y_l^m(\vartheta, \varphi) .$$

Geben Sie die verbleibende Differentialgleichung für $R(r)$ an.

- c) Betrachten Sie jetzt Teilchen mit dem Drehimpuls $l = 0$. Leiten Sie unter Verwendung von Stetigkeitsbedingungen eine Bestimmungsgleichung für die Energien der gebundenen Zustände ab.
- d) Für welche V_0 existieren gebundene Zustände? Vergleichen Sie mit dem Ergebnis für den eindimensionalen Potentialtopf.