

Aufgabe 23 (mündlich): Matrixdarstellung des harmonischen Oszillators (5 Punkte)
Gegeben sei ein eindimensionaler harmonischer Oszillator mit dem Hamiltonoperator

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

Die durch die Eigenwertgleichung $H|n\rangle = E_n|n\rangle$ mit $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$ definierten Zustände $|n\rangle$ bilden eine Basis des Hilbertraums.

- a) Berechnen Sie die Matrixelemente $a_{nn'} = \langle n|a|n'\rangle$ und $a_{nn'}^\dagger = \langle n|a^\dagger|n'\rangle$ der Operatoren

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}}p, \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - \frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}}p.$$

Verwenden Sie dazu die aus der Vorlesung bekannten Eigenschaften von a und $a^\dagger$.

- b) Wie lauten damit die Matrixelemente $x_{nn'}$ und $p_{nn'}$ des Orts- bzw. Impulsoperators?
- c) Der Erwartungswert eines Operators A im Zustand $|n\rangle$ ist durch das Diagonalelement A_{nn} in der entsprechenden Matrixdarstellung gegeben. Berechnen Sie die Erwartungswerte der Operatoren x , p , x^2 und p^2 .
(Hinweis: Die Matrixdarstellung des Operators A^2 erhält man aus der Matrixdarstellung von A durch Matrixmultiplikation.)
- d) Berechnen Sie die Orts- und Impulsunschärfe im Zustand $|n\rangle$ und zeigen Sie, dass die Heisenbergsche Unschärferelation

$$(\Delta x^2)_{nn} (\Delta p^2)_{nn} \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

erfüllt ist.

Aufgabe 24 (mündlich): Erwartungswerte (5 Punkte)
Berechnen Sie für die Eigenzustände $|n\rangle$ des eindimensionalen harmonischen Oszillators mit $V = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ folgende Erwartungswerte

- a) $\langle x^3 \rangle$
- b) $\langle x^4 \rangle$
- c) Zeigen Sie, dass das quantenmechanische Analogon zum Virial-Theorem

$$\langle V \rangle = \langle T \rangle = \frac{\langle H \rangle}{2}$$

gilt. Dabei ist $T = \frac{p^2}{2m}$ der Operator der kinetischen Energie und $H = T + V$ der Hamiltonoperator.

Aufgabe 25 (schriftlich): Schrödinger-Katzen-Zustände

(10 Punkte)

Für kohärente Zustände eines harmonischen Oszillators der Frequenz ω gilt $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ und $\langle\alpha|a^\dagger = \alpha^*\langle\alpha|$. Die Entwicklung von $|\alpha\rangle$ in Energie-Eigenzustände lautet

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle .$$

- a) Zwei kohärente Zustände $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$ mit $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ und $a|\beta\rangle = \beta|\beta\rangle$ ($\alpha \neq \beta$) sind nicht orthogonal zueinander. Zeigen Sie, dass für das Skalarprodukt

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2) + \alpha^*\beta\right]$$

gilt.

- b) Superpositionen aus zwei kohärenten Zuständen werden als Schrödinger-Katzen-Zustände bezeichnet. Berechnen Sie für den Zustand

$$|\psi\rangle = \frac{N}{\sqrt{2}} \left(|\alpha\rangle + e^{i\varphi} |\beta\rangle \right) \quad \text{mit} \quad \varphi \in \mathbb{R}$$

die Normierung N .

- c) Es seien nun $\alpha(t) = 0$, $\beta(t) = e^{-i\omega t}$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$, also

$$|\psi\rangle = \frac{N}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle + i |e^{-i\omega t}\rangle \right), \quad \langle\psi| = \frac{N}{\sqrt{2}} \left(\langle 0| - i \langle e^{-i\omega t}| \right).$$

Berechnen Sie die Normierung N , den Ortserwartungswert $\langle x \rangle$ und die quadratische Unschärfe $(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$. Skizzieren Sie $\langle x \rangle$ und $(\Delta x)^2$. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den aus der Vorlesung bekannten Ergebnissen für einen einzelnen kohärenten Zustand mit $\alpha = 1$.