

Aufgabe 7 (mündlich): Mittelwerte und Unschärfen

(5 Punkte)

- a) Gegeben sei die eindimensionale Wellenfunktion

$$\psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) & \text{für } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Berechnen Sie die Mittelwerte $\langle x \rangle$ und $\langle p \rangle$, die Unschärfen Δx und Δp sowie das Unschärfeprodukt $\Delta x \Delta p$.

- b) Zeigen Sie, dass für jede reelle eindimensionale Wellenfunktion $\psi(x)$ der Impulsmittelwert $\langle p \rangle$ verschwindet.
- c) Gegeben sei eine eindimensionale Wellenfunktion $\psi(x)$ mit $\langle x \rangle = x_0$, $\langle p \rangle = p_0$, $\Delta x = \sigma_x$ und $\Delta p = \sigma_p$. Welche Werte haben $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$, Δx und Δp für die Wellenfunktion $\tilde{\psi}(x) = \psi(x)e^{ikx}$?

Aufgabe 8 (schriftlich): Wellenfunktionen und Stromdichten

(2 Punkte)

Berechnen Sie für die folgenden Wellenfunktionen die Wahrscheinlichkeitsdichten und die Wahrscheinlichkeitsstromdichten:

- a) $\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ mit $A, B \in \mathbb{C}$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

- b) $\psi(\vec{r}) = \frac{A}{r} e^{\pm ikr}$ (verwenden Sie den Nabla-Operator in Kugelkoordinaten).

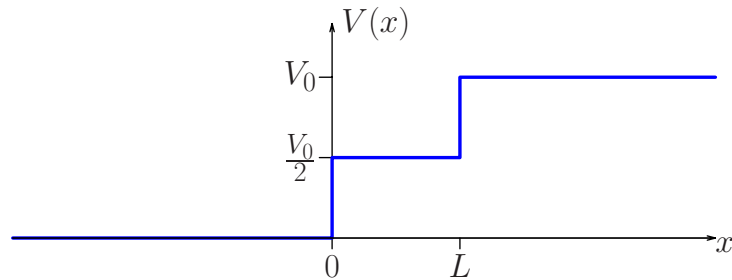
Wie groß ist der gesamte Wahrscheinlichkeitsstrom durch eine Kugelfläche mit Radius R und Mittelpunkt bei $\vec{r} = 0$?

Aufgabe 9 (schriftlich): Potentialtreppe

(9 Punkte)

Ein Teilchen mit der Energie $E > V_0$ bewege sich von links auf eine doppelte Potentialstufe $V(x)$ zu

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ \frac{V_0}{2} & \text{für } 0 < x < L \\ V_0 & \text{für } L \leq x \end{cases}$$



- Wie lauten die Ansätze für die Wellenfunktionen in den drei Bereichen $x \leq 0$, $0 < x < L$, $L \leq x$ und welche Anschlussbedingungen müssen an den Sprungstellen des Potentials erfüllt sein?
- Berechnen Sie den Reflexionskoeffizienten R für die in den Bereich $x < 0$ reflektierte Welle. Was ergibt sich für den Grenzfall $L = 0$.
- Skizzieren Sie (z. B. unter Verwendung eines Grafikprogramms) R als Funktion von E/V_0 für $L/L_0 = 0, 7, 10$, wobei $L_0^2 = \hbar^2/(mV_0)$ ist. Diskutieren Sie kurz Ihr Ergebnis.

Aufgabe 10 (mündlich): δ -Potentialbarriere

(4 Punkte)

Gesucht ist das Verhalten einer Teilchenwelle, die sich von links auf eine Potentialbarriere der Form

$$V(x) = \beta \delta(x) \quad \text{mit} \quad \beta > 0$$

zu bewegt.

- Leiten Sie durch Integration der zeitunabhängigen Schrödingergleichung die Sprungbedingung

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\psi'(\varepsilon) - \psi'(-\varepsilon)] = \frac{2m\beta}{\hbar^2} \psi(0)$$

für die Ableitung der Wellenfunktion her. Verwenden Sie dazu die Stetigkeit von $\psi(x)$.

- Berechnen Sie den Reflexionskoeffizienten R und den Transmissionskoeffizienten T . Zeigen Sie, dass gilt: $R + T = 1$.
- Skizzieren Sie den Verlauf von $T(E)$, z. B. unter Verwendung eines Grafikprogramms.