

Aufgabe 4 (schriftlich, Abgabe 16.04.): Diracsche δ -Funktion (δ -Distribution) (4 Punkte)

Es gibt „verallgemeinerte“ Funktionen (Distributionen) $f(x)$, die wie folgt definiert sind:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)F(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_k(x)F(x) dx .$$

$F(x)$ ist eine beliebig oft differenzierbare sogenannte „Grundfunktion“ und soll ein „geeignetes“ asymptotisches Verhalten haben, so dass alle Integrale existieren.

Die δ -Funktion ist ein Spezialfall einer verallgemeinerten Funktion, für die gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)F(x) dx = F(0) \quad (1)$$

- a) Zeigen Sie, dass die Folge $f_k(x) = \frac{\sin(kx)}{\pi x}$ eine verallgemeinerte Funktion mit den Eigenschaften der δ -Funktion (Gl. (1)) definiert.

Hinweis: Variablensubstitution

- b) Zeigen Sie, dass auch die Folgen

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad f_k(x) &= \frac{\sin^2(kx)}{\pi k x^2} \\ \text{(ii)} \quad f_k(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-k}^k e^{itx} dt \\ \text{(iii)} \quad f_k(x) &= \frac{1}{\pi k (x^2 + 1/k^2)} \\ \text{(iv)} \quad f_k(x) &= \sqrt{\frac{k}{\pi}} e^{-kx^2} \end{aligned}$$

die gleiche Eigenschaft wie die Folge in Aufgabenteil a) besitzen. Daraus ergeben sich die folgenden Darstellungen der δ -Funktion

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \delta(x) &= \frac{1}{\pi} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(kx)}{kx^2} \\ \text{(ii)} \quad \delta(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dt \\ \text{(iii)} \quad \delta(x) &= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \quad (\varepsilon > 0) \\ \text{(iv)} \quad \delta(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{k} e^{-kx^2} \end{aligned}$$

- c) Zeigen Sie, dass für die verallgemeinerte Funktion $\delta(g(x))$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(g(x)) dx = \sum_j \frac{f(x_j)}{\left| \frac{dg}{dx}(x_j) \right|}$$

wobei die x_j die einfachen Nullstellen der Funktion $g(x)$ sind.

Aufgabe 5 (mündlich, Bespr. 21.04.): Fourier-Transformation

(8 Punkte)

Die Fouriertransformierte $f(k)$ einer Funktion $g(x)$ ist gegeben durch

$$f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-ikx} dx .$$

Dabei gehen $g(x)$ und alle Ableitungen für $|x| \rightarrow \infty$ gegen Null.

- a) Wie lautet die zugehörige Umkehrtransformation?
- b) Gegeben seien die folgenden Funktionen $G(x)$:

$$\begin{aligned} x^n g(x) & , & g(x+x_0) & , \\ \frac{d^n}{dx^n} g(x) & , & g_1(x)g_2(x) & , \\ e^{-ik_0x} g(x) & , & \int_{-\infty}^{\infty} g_1(y)g_2(x-y) dy & . \end{aligned}$$

Drücken Sie die zugehörigen Fouriertransformierten $F(k)$ durch die Fouriertransformierten $f(k)$ bzw. $f_i(k)$ der Funktionen $g(x)$ bzw. $g_i(x)$ aus.

- c) Zeigen Sie das Parsevalsche Theorem $\int g_1^*(x)g_2(x) dx = \int f_1^*(k)f_2(k) dk$. Was folgt daraus speziell für $g_1 = g_2 = g$?
- d) Gegeben sei eine normierte Funktion $g(x)$, d.h. eine Funktion mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx = 1 ;$$

ihre Fouriertransformierte sei $f(k)$. Die Momente $\langle x^n \rangle$ bzw. $\langle k^n \rangle$ sind definiert durch

$$\langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^n |g(x)|^2 dx , \quad \langle k^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} k^n |f(k)|^2 dk$$

Wir nehmen zunächst an, dass die Mittelwerte verschwinden, d.h. $\langle x \rangle = \langle k \rangle = 0$. Zeigen Sie, dass die mittleren quadratischen Abweichungen

$$(\Delta x)^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle , \quad (\Delta k)^2 = \langle (k - \langle k \rangle)^2 \rangle$$

die folgende Ungleichung (Unschärferelation) erfüllen:

$$\Delta x \cdot \Delta k \geq \frac{1}{2}$$

Hinweis: Verwenden Sie hierzu das Integral

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| kf(k) + \lambda \frac{df}{dk} \right|^2 dk , \quad \lambda \text{ reell.}$$

- e) Begründen Sie, dass die Ungleichung in Teil d) auch im Fall nicht-verschwindender Mittelwerte gilt.

Aufgabe 6 (schriftlich, Abgabe 16.04.): Wellenpaket

(6 Punkte)

Ein Wellenpaket für ein freies Teilchen im eindimensionalen Fall sei durch folgendes Fourierintegral (Entwicklung nach ebenen Wellen) gegeben:

$$\psi(x, t) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(k) e^{i[kx - \omega(k)t]} dk \quad (1)$$

$\varphi(k)$ ist die Fouriertransformierte von $\psi(x, 0)$ und erfüllt die Beziehung

$$\varphi(k) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, 0) e^{-ikx} dx,$$

$\omega(k)$ ist gegeben durch $\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$.

a) $\varphi(k)$ habe die Gestalt

$$\varphi(k) = A \exp(-a|k - k_0|) \quad (k_0, A, a \text{ reell; } A > 0 \text{ und } a > 0)$$

Welchen Wert hat die Konstante A , damit $\psi(x, t)$ auf 1 normiert ist?

- b) Wegen der „guten“ Lokalisierung von $\varphi(k)$ im k -Raum (a sei genügen groß) kann man in erster Näherung den Exponenten des Integranden in Gl. (1) linearisieren (Entwicklung von $\omega(k)$ um k_0 , Abbruch nach dem linearen Glied). Das so entstehende Integral kann man elementar auswerten. Führen Sie diese Integration durch.
- c) Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(x, t)|^2$ für verschiedene Zeiten. Was ist bei der genähert berechneten Ortsform $\psi(x, t)$ des Pakets qualitativ falsch? (Denken Sie an die de Broglieschen Beziehungen und was daraus folgt.)
- d) Berechnen Sie für die gefundene Näherungslösung die Erwartungswerte $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle p \rangle$, $\langle p^2 \rangle$ sowie das Unschärfeprodukt:

$$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle \langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle.$$

Vergleichen Sie das Unschärfeprodukt mit demjenigen eines Gaußschen Wellenpakets.

Aufgabe 7 (mündlich, Bespr. 21.04.): Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

(3 Punkte)

Die Klein-Gordon-Gleichung

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi(\vec{r}, t) = 0$$

ist eine relativistische Wellengleichung für freie Teilchen.

- a) Welche Beziehung muss zwischen ω und $\vec{k}$ bestehen, damit ebene Wellen der Form $\exp \left[i \left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t \right) \right]$ diese Gleichung erfüllen? Sind alle Frequenzen möglich? Wie lautet die zugehörige Energie-Impuls-Beziehung $E(\vec{p})$?
- b) Berechnen Sie die Phasen- und die Gruppengeschwindigkeit dieser Wellen und stellen Sie einen Zusammenhang zwischen diesen beiden Geschwindigkeiten her.