

Aufgabe 34 (schriftlich): Bohrsche Bedingung

(4 Punkte)

Bestimmen Sie für einen unendlich schweren Kern aus der Bohrschen Bedingung die Bahngeschwindigkeit und den Bahnradius eines Elektrons im H-Atom auf Bahnen mit $n = 1, 40$ und 100 .

Was ändert sich für einen endlich schweren Kern?

Aufgabe 35 (mündlich): Nullpunktsenergie

(4 Punkte)

Berechnen Sie die Nullpunktsenergie eines Elektrons, wenn man es auf den Bereich des Wasserstoffkerns ($r = 0,5 \cdot 10^{-14} \text{ m}$) lokalisieren wollte.

- Berechnen Sie dazu die Energie des Grundzustands eines unendlichen dreidimensionalen Potentialtopfes der Breite $d = 2r$ für die Elektronmasse.
- Führen Sie auch eine relativistische Rechnung durch, indem Sie für die Elektronmasse die Formel $E = m_e c^2$ verwenden.
- Vergleichen Sie diese Energie mit derjenigen aus der Coulomb-Attraktion im Abstand r .

Aufgabe 36 (mündlich): Spins und Spinoren

(4 Punkte)

Die Spin-Eigenvektoren können in der Basis, in der S_z diagonal ist, als $|\uparrow\rangle = \chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $|\downarrow\rangle = \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit den Eigenwerten $+\frac{\hbar}{2}$ und $-\frac{\hbar}{2}$ geschrieben werden. Bestimmen Sie in dieser Basis die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren χ_y zu S_y .

Aufgabe 37 (schriftlich): Spinpräzession im Magnetfeld

(8 Punkte)

Ist ein Elektron (zum Beispiel in einem Kristallgitter) an einem bestimmten Ort lokalisiert, so kann sein Spin $\vec{S}$ oft als einziger Freiheitsgrad angesehen werden. Bei Anwesenheit eines homogenen, zeitunabhängigen Magnetfelds $\vec{B} = B \vec{e}_x$ lautet der Hamiltonoperator

$$H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = \frac{g}{2} \mu_B \vec{\sigma} \cdot \vec{B}.$$

Dabei ist μ_B das Bohrsche Magneton und g der Landé-Faktor des Elektrons. $\vec{\sigma}$ ist der Vektor der Paulischen Spinmatrizen und für die Spinoperatoren gilt $S_i = \frac{\hbar}{2} \sigma_i$.

- Wie lautet die Matrixdarstellung von H in der Basis der Eigenvektoren $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu S_z ?
Hinweis: Verwenden Sie die Larmor-Frequenz $\omega_L = g\mu_B B/\hbar$.

- Der allgemeine Zustand des Systems lautet

$$|\psi\rangle = \alpha_+ |\uparrow\rangle + \alpha_- |\downarrow\rangle.$$

Wie lautet die zeitabhängige Schrödingergleichung für $|\psi\rangle$? Welche Bewegungsgleichungen ergeben sich daraus für die Koeffizienten α_+ und α_- ?

- Die gekoppelten Bewegungsgleichungen lassen sich leicht mit Hilfe der zweiten Ableitung entkoppeln. Lösen Sie die sich daraus ergebenden Bewegungsgleichungen mit der Anfangsbedingung $|\psi(t=0)\rangle = |\uparrow\rangle$. Was ergibt sich für $|\psi(t)\rangle$?
- Berechnen Sie für diesen Zustand die Erwartungswerte $\langle S_x \rangle$, $\langle S_y \rangle$ und $\langle S_z \rangle$.
- Berechnen Sie außerdem $\langle S_x^2 \rangle$, $\langle S_y^2 \rangle$ und $\langle S_z^2 \rangle$ sowie die zugehörigen Schwankungen ΔS_x , ΔS_y und ΔS_z .