5. Übung zur Festkörpertheorie II (SS 2014) **Prof. Krüger**
Ausgabedatum: 08.07.2014 Abgabedatum: 15.07.2014

Aufgabe 13: Polaron (6 Punkte)

Ein Elektron, das sich durch einen Ionenkristall bewegt, wechselwirkt mit den optischen Phononen. Der Wechselwirkungsoperator hat nach einer kanonischen Transformation die Gestalt

$$\hat{H}_1 = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}\sigma} \sum_{\vec{q}\,\vec{q}\,'} \Bigg(\Big(A(\vec{k},\,\vec{q})(\hat{a}_{\vec{q}}\,\hat{a}_{\vec{q}\,'} + \hat{a}_{\vec{q}}\,\hat{a}^{\dagger}_{-\vec{q}\,'}) + B\,(\vec{k},\,\vec{q})(\hat{a}^{\dagger}_{-\vec{q}}\,\hat{a}_{\vec{q}\,'} + \hat{a}^{\dagger}_{-\vec{q}}\,\hat{a}^{\dagger}_{-\vec{q}\,'}) \Big) \times$$

$$\times\, W\,(\vec{q})\,W\,(\vec{q}\,')\,(\hat{c}^{\dagger}_{\vec{k}+\vec{q}+\vec{q}\,'\,\sigma}\,\hat{c}_{\vec{k}\sigma} - \hat{c}^{\dagger}_{\vec{k}+\vec{q}\sigma}\,\hat{c}_{\vec{k}-\vec{q}\,'\sigma}) + \delta_{\vec{q},\vec{q}\,'}|W\,(\vec{q})|^2 (B\,(\vec{k},\vec{q}) - A\,(\vec{k},\,\vec{q})\,\hat{c}^{\dagger}_{\vec{k}\sigma}\,\hat{c}_{\vec{k}\sigma} \Bigg) \,.$$

Dabei sind

$$A\,(\vec{k},\,\vec{q}) = \frac{-1}{\varepsilon_{\vec{k}+\vec{q}} - \varepsilon_{\vec{k}} - \hbar\,\omega_{\mathrm{LO}}} \quad \text{und} \quad B\,(\vec{k},\,\vec{q}) = \frac{-1}{\varepsilon_{\vec{k}+\vec{q}} - \varepsilon_{\vec{k}} + \hbar\,\omega_{\mathrm{LO}}} \quad \text{mit} \quad \varepsilon_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2\,k^2}{2\,m}\,.$$

Das Wechselwirkungsmatrixelement hat die Eigenschaft

$$W\,(-\vec{q}) \,=\, W\,(\vec{q})^* \qquad \text{mit} \qquad |W\,(\vec{q})| \,=\, \frac{\gamma}{q}\,.$$

Dabei ist γ eine reelle Konstante. $\hbar\,\omega_{\mathrm{LO}}$ ist die Energie der longitudinal optischen Phononen.

a) Berechnen Sie den Energiebetrag E_1 von $\hat{H}_1$ in erster Ordnung der Störungstheorie. Gehen Sie dabei von einem Produktzustand $|\Psi\rangle \,=\, |\Phi\rangle_{\mathrm{el}}\,|\chi\rangle_{\mathrm{ph}}$ aus, der ein Elektron mit Wellenvektor $\vec{k}$ und keine Phononen enthält.

$$|\Phi\rangle_{\mathrm{el}} \,=\, \hat{c}_{\vec{k}^{\dagger}\,\sigma}\,|0\rangle_{\mathrm{el}} \qquad \text{und} \qquad |\chi\rangle_{\mathrm{ph}} \,=\, |n_{\vec{q}} \,=\, 0\rangle_{\mathrm{ph}}\,.$$

Zeigen Sie, dass diese Energie folgende Form hat

$$E_1 \,=\, \sum_{\vec{q}} \frac{|W\,(\vec{q})|^2}{\varepsilon_{\vec{k}} - \varepsilon_{\vec{k}+\vec{q}} - \hbar\,\omega_{\mathrm{LO}}}\,.$$

b) Werten Sie die verbleibende Summe über $\vec{q}$ durch Übergang zu einem Integral aus. Ersetzen Sie zur analytischen Auswertung die Integration über die ersten Brillouin-Zone durch ein Integral über den ganzen $\vec{q}$-Raum.

c) Analysieren Sie Ihr Endergebnis im Grenzfall kleiner Wellenvektoren $\vec{k}$. Führen Sie dazu eine Taylor-Entwicklung durch. Was können Sie aus dem quadratischen Term über die Änderung der effektiven Elektronenmasse durch die Elektron-Phonon-Wechselwirkung sagen?

Nützliches Integral: $$\int_0^\infty \frac{1}{x}\,\ln\left|\frac{a^2 \,+\, 2\,b\,x \,+\, x^2}{a^2 \,-\, 2\,b\,x \,+\, x^2}\right| d\,x \,=\, 2\,\pi\,\arcsin\frac{b}{a}\,.$$

Aufgabe 14: Der Effekt des Fermisees beim Cooper-Paar (4 Punkte)

Die Energie der Cooper-Paare wird bei $T = 0$ durch

$$1 = V \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2\,\varepsilon_{\vec{k}} - \lambda} \qquad \text{mit} \qquad V > 0 \qquad \text{und} \qquad \varepsilon_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2\,m}$$

bestimmt. Dabei läuft $\vec{k}$ über alle Zustände mit $E_F \leq \varepsilon_{\vec{k}} \leq \hbar\,\omega_D$. Nehmen Sie in dieser Aufgabe an, dass $E_F = 0$ ist, d. h. „der Fermisee ist leer“.

a) Zeigen Sie, dass in drei Dimensionen nicht für alle Werte von V ein gebundener Zustand (also $\lambda < 0$) existiert. Berechnen Sie die kritische Wechselwirkungsstärke V_c, oberhalb derer immer ein gebundener Zustand auftritt.

b) Was gilt im eindimensionalen Fall?

Aufgabe 15: Supraleitender Stab (5 Sonderpunkte)

Die Stromdichte $\vec{j}$ hängt in einem Supraleiter über

$$\vec{j} = -\frac{n_s\,e^2}{m}\,\vec{A}\,(\vec{r}\,)$$

vom Vektorpotential $\vec{A}\,(\vec{r}\,)$ ab. Dabei gibt n_s die Dichte der supraleitenden Elektronen an.

a) Zeigen Sie unter Verwendung der Maxwell-Gleichungen für den *statischen* Fall, dass in einem Supraleiter die Helmholtz-Gleichung für das Magnetfeld gilt

$$\Delta\,\vec{B}\,(\vec{r}\,) = \mu_0\,\frac{n_s\,e^2}{m}\,\vec{B}\,(\vec{r}\,)\ .$$

b) Lösen Sie die Helmholtz-Gleichung für einen supraleitenden Stab der Breite $2\,a$, der sich in einem Magnetfeld befindet. Außerhalb des Stabes herrsche ein homogenes Magnetfeld $\vec{B}_0 = (0,\,0,\,B_0)$ in z-Richtung. Vernachlässigen Sie im Stab die y- und z-Abhängigkeit des Feldes. Nehmen Sie $\vec{B} = \vec{B}\,(x)$ mit $\vec{B}\,(-a) = \vec{B}_0 = \vec{B}\,(a)$ an. Skizzieren Sie das berechnete Magnetfeld $\vec{B}\,(x)$.

c) Berechnen Sie die y-Komponente der Stromdichte und skizzieren Sie Ihr Ergebnis.