

**Aufgabe 21: Unbestimmte Integrale**

Bestimmen Sie eine Stammfunktion von  $f(x)$ :

- |   |                                     |
|---|-------------------------------------|
| a) $f(x) = x^2 + 4x^4$                    | f) $f(x) = \cos(x) \cdot \sin^2(x)$ |
| b) $f(x) = \sqrt{x} - 6x^4$               | g) $f(x) = x^2 e^{-3x^3}$           |
| c) $f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}$ | h) $f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^2}$     |
| d) $f(x) = (7x+3)^7$                      | i) $f(x) = x \cdot \ln(x)$          |
| e) $f(x) = x(3+3x^2)^3$                   | j) $f(x) = x^2 e^{-x}$              |

**Aufgabe 22: Bestimmte Integrale**

Berechnen Sie folgende Integrale:

- |  |  |
|--|--|
| a) $\int_1^5 dx$                                 | f) $\int_0^{1/2} \sin(2\pi(x+1)) dx$     |
| b) $\int_2^4 \left(\frac{1}{x^2} + 2x\right) dx$ | g) $\int_1^\infty e^{-3x} dx$            |
| c) $\int_{-3}^3  x  dx$                          | h) $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$ |
| d) $\int_0^\pi \sin(x) dx$                       | i) $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx$     |
| e) $\int_0^{2\pi} \sin(x) dx$                    | j) $\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{1+3x}} dx$   |

k\*) Berechnen Sie den Flächeninhalt derjenigen Punktmenge, die von den Graphen der Funktionen

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} + x + \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad g(x) = 2x$$

sowie von der  $x$ -Achse begrenzt wird.

### Aufgabe 23: Kreisbahn

Ein Körper bewege sich auf einer Kreisbahn mit Radius  $R$ . Die Bahnkurve lautet

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

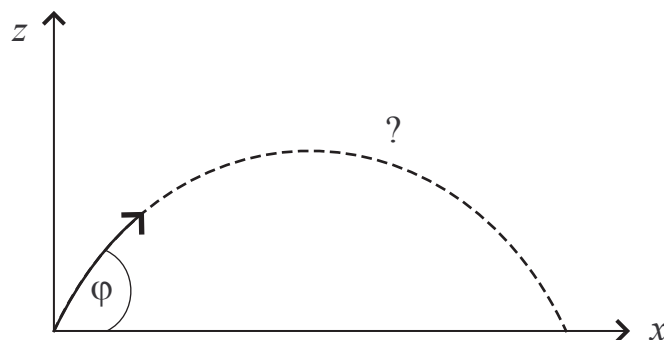
Dabei sei die sogenannte Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  konstant.

- Skizzieren Sie die Bahn in der  $x$ - $y$ -Ebene. Wo befindet sich das Teilchen zur Zeit  $t = 0$  und wo bei  $t = \frac{3\pi}{2\omega}$ ?
- Berechnen Sie die Geschwindigkeit  $\vec{v}(t) \equiv \dot{\vec{r}}(t)$ , die Beschleunigung  $\vec{a}(t) \equiv \ddot{\vec{r}}(t)$  und die Beträge von  $\vec{v}(t)$  und  $\vec{a}(t)$ . Geben Sie  $\vec{v}(t)$  und  $\vec{a}(t)$  für  $t = 0$  und  $t = \frac{3\pi}{2\omega}$  an.

### Aufgabe 24\*: Wurfbahn

Ein Ball wird unter einem Winkel  $\varphi$  mit der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  abgeworfen und bewegt sich unter dem Einfluss der Schwerkraft auf der Bahnkurve

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_0(t) \cos \varphi \\ 0 \\ v_0(t) \sin \varphi - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix}.$$



- Skizzieren Sie  $x(t)$ ,  $z(t)$  und die Flugbahn  $z(x)$  für  $\varphi = 60^\circ$  und  $v_0 = 20$  m/s. Benutzen Sie für die Skizze  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>.
- Berechnen Sie für beliebige  $v_0$  und  $\varphi$  die Geschwindigkeit  $\vec{v}(t)$ , die Beschleunigung  $\vec{a}(t)$  und deren Beträge.
- Zu welcher Zeit  $t_1$  erreicht der Ball den höchsten Punkt der Bahn? Wie muss der Abwurfwinkel  $\varphi$  gewählt werden, damit die Höhe maximal wird?
- Nach welcher Zeit  $t_2$  trifft der Ball wieder am Erdboden auf? Wie groß ist der Betrag der Geschwindigkeit beim Auftreffen? Wie muss der Abwurfwinkel  $\varphi$  gewählt werden, damit die Wurfweite maximal wird? Wie groß ist die maximale Wurfweite?