Aufgabe 25 (mündlich): Temperaturschwankungen unterhalb der Erdoberfläche (12 Punkte)

Zur Beschreibung der jährlichen Temperaturschwankungen unterhalb der Erdoberfläche gehen wir von folgendem Modell aus: Die Erdoberfläche wird als Oberfläche eines Halbraums $(z \le 0)$ angesehen. Bei $z = 0$ wird als Randbedingung der Temperaturverlauf $T = T_0 - T_1 \cos(\omega_1 t)$ vorgegeben.

$(T_0 = 8°\text{C}, T_1 = 10°\text{C}, \omega_1 = \frac{2\pi}{1\,\text{Jahr}}$, Temperaturleitwert $\alpha = 0{,}006 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}})$

a) Zeigen Sie, dass der Ansatz

$$T(z,t) = T_0 - \frac{1}{2} T_1 (e^{i\omega_1 t}\, g_1(z) + e^{-i\omega_1 t}\, g_2(z))$$

die ein-dimensionale Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ erfüllt. Welche Differential-gleichungen müssen dazu $g_1(z)$ und $g_2(z)$ erfüllen? Wie lauten die Lösungen dieser Differentialgleichungen mit den Randbedingungen $g_i(0) = 1$, $g_i(z \to -\infty) = 0$ $(i = 1, 2)$?

Zeigen Sie dass die Lösung folgende Form annimmt:

$$T(z,t) = T_0 - T_1 e^{\sqrt{\frac{\omega_1}{2\alpha}} z} \cos\left(\omega_1 t + \sqrt{\frac{\omega_1}{2\alpha}}\, z \right)$$

b) In welcher Tiefe ist die Amplitude der Temperaturwelle auf den *e*-ten Teil des Maximalwertes abgesunken?

c) Wie groß ist die Geschwindigkeit der Temperaturwelle?

d) Skizzieren Sie den Temperaturverlauf $T(z)$ mit $0 \ge z \ge -20\,\text{m}$ für Januar (t=0), April, Juli und Oktober.

e) Betrachten Sie jetzt die tägliche Temperaturschwankung $T = T_0 + T_2 \cos\big(\omega_2 (t - t_2)\big)$ $(T_2 = 9°\text{C}, \omega_2 = \frac{2\pi}{24\,\text{h}}, t_2 = 14\,\text{h})$. Wie tief dringt diese Welle relativ zur jährlichen Temperaturschwankung in die Erde ein?

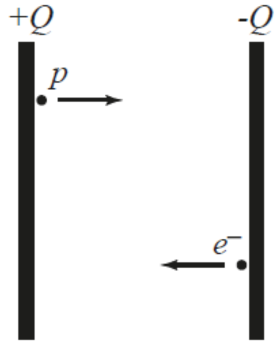
f) Geben Sie $T(z, t)$ für eine Oberflächentemperatur von

$T(0,t) = T_0 - T_1 \cos(\omega_1 t) + T_2 \cos\big(\omega_2 (t - t_2)\big)$ an.

g) In welcher Tiefe muss man Wasserrohre verlegen, um vor dem Frost sicher zu sein? In welcher Tiefe sollte ein Weinkeller angelegt werden, damit die Temperaturschwankungen kleiner als 1°C sind? In welcher Tiefe ist es im Januar am wärmsten?

Aufgabe 26 (schriftlich): Bewegung im elektrischen Feld (8 Punkte)

Zwei entgegengesetzt geladene Kupferplatten befinden sich in einem Abstand von 5 cm zueinander. Ein Proton und ein Elektron starten zur gleichen Zeit aus dem Ruhezustand an jeweils der Platte, deren Ladung dasselbe Vorzeichen wie die Teilchenladung hat. Bei welchem Abstand zur positiv geladenen Platte befinden sich die Teilchen auf gleicher Höhe, haben also den gleichen Abstand zu dieser Platte? Vernachlässigen Sie die Anziehungskraft des Protons und des Elektrons aufeinander.



Aufgabe 27 (schriftlich): Elektrisches Feld einer Kugelschale (8 Punkte)

Das elektrostatische Potential $\phi(\vec{r})$ einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ ist durch das Integral

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, d^3 r'$$

gegeben. Berechnen Sie $\phi(\vec{r})$ und das zugehörige elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ im gesamten Raum für eine homogen geladene Kugelschale mit Innenradius R_1 und Außenradius R_2, d.h.

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad r < R_1 \\ \rho_0 & \text{für} \quad R_1 \le r \le R_2 \\ 0 & \text{für} \quad r > R_2 \end{cases}$$

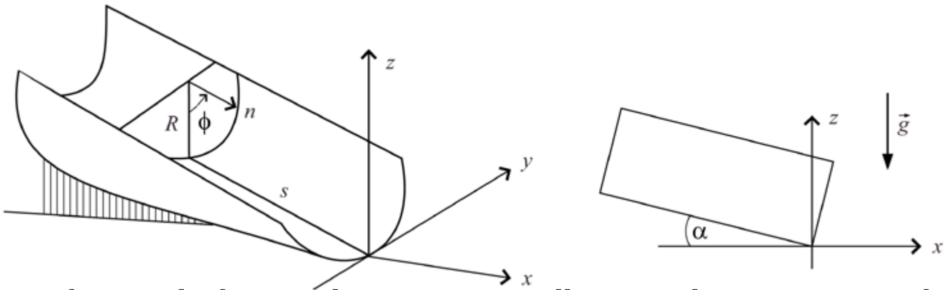
Drücken Sie Ihre Ergebnisse mit Hilfe der Gesamtladung Q der Kugel aus.

(Hinweise: es gilt $|\vec{r}-\vec{r}\,'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2r\,r'\cos\vartheta}$; für ein kugelsymmetrisches Potential gilt $\vec{E} = -\text{grad}\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r}$)

!Bitte die TE Aufgaben separat abgeben!

Aufgabe TE9 (mündlich): Geneigte Rinne im Schwerefeld der Erde (8 Punkte)

Beschreiben Sie die Bewegung eines Massenpunktes m, der reibungsfrei in einer um den Winkel α gegen die Horizontale geneigten Rinne mit halbkreisförmigem Querschnitt (Radius R) gleitet (vgl. Skizze).

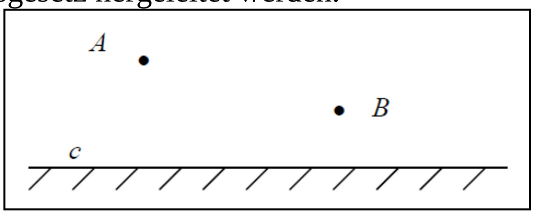


a) Wie viele Freiheitsgrade besitzt das System? Stellen Sie die Lagrange-Funktion in den systemangepassten Koordinaten auf.
b) Wie sieht die Hamilton-Funktion für das System aus?
c) Leiten Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen her. Kann der Massenpunkt die Rinne seitlich verlassen $\left(\varphi(t) > 90°\right)$, falls er sich zur Zeit $t = 0$ in Ruhe befindet und $\varphi(0) < 90°$ ist? Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für kleine Amplituden.

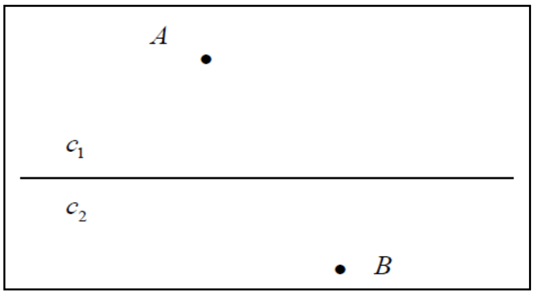
Aufgabe TE10 (schriftlich): Fermatsches Prinzip (6 Punkte)

Das Fermatsche Prinzip besagt, dass ein Lichtstrahl zwischen zwei vorgegebenen Punkten A und B den Weg nimmt, auf dem das Licht in der kürzesten Zeit von A nach B kommt. Aus diesem Prinzip sollen im Folgenden das Reflexions- und das Brechungsgesetz hergeleitet werden.

a) Gegeben sei ein homogenes Medium mit Lichtgeschwindigkeit c in einem Halbraum $z \ge 0$. Zeigen Sie, dass der Lichtstrahl von A nach B, der unterwegs die Grenzfläche $z < 0$ berührt, das Reflexionsgesetz erfüllt (Skizze rechts).



b) Gegeben seien nun zwei homogene Medien mit Lichtgeschwindigkeiten c_1 und c_2, die an der Grenzfläche $z = 0$ zusammenstoßen. Der Punkt A liege im Medium 1, der Punkt B im Medium 2. Leiten Sie aus dem Fermatschen Prinzip das Snelliussche Brechungsgesetz her.



Aufgabe TE11 (schriftlich): Variationsrechung (4 Punkte)

Berechnen Sie die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten auf der Oberfläche eines Zylinders mit Radius R, dessen Symmetrieachse mit der z-Achse übereinstimmt.